ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2023

Práctica 2 - Primera Parte

Funciones de varias variables

A. Mapas de contorno y gráficas de funciones

1. Describir y graficar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones:

$$
\begin{array}{ll}
(a)\quad f(x,y)=\ln(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4) & (b)\ f(x,y)=\sqrt{6-(2x+3y)} \\
(c)\quad f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{y-x^2} & (d)\ f(x,y)=\dfrac{1}{x} \\
(e)\quad f(x,y)=\ln(1-y+x^2)\operatorname{sen} x & (f) f(x,y)=\displaystyle\int_x^y \frac{1}{1+t^2}dt \\
(g)\quad f(x,y)=\cos x\sqrt{1-x^2+y^2} & (h) f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2y)}{\ln(1-x^2)}
\end{array}
$$

2. Reconocer y graficar las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z=f(x,y)$. Pueden utilizar el GeoGebra para graficarlas.

$$
\begin{array}{ll}
(a)\quad z=2x^2+y^2 & (b) z^2=1-x^2-\dfrac{y^2}{2} \\
(c)\quad z=\dfrac{1}{x^2+y^2} & (d) 3x+2y-z=0 \\
(e)\quad z^2=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}-2 & (f) 6x^2+y^2-z^2=1 \\
(g)\quad x^2+y^2=4z^2 &
\end{array}
$$

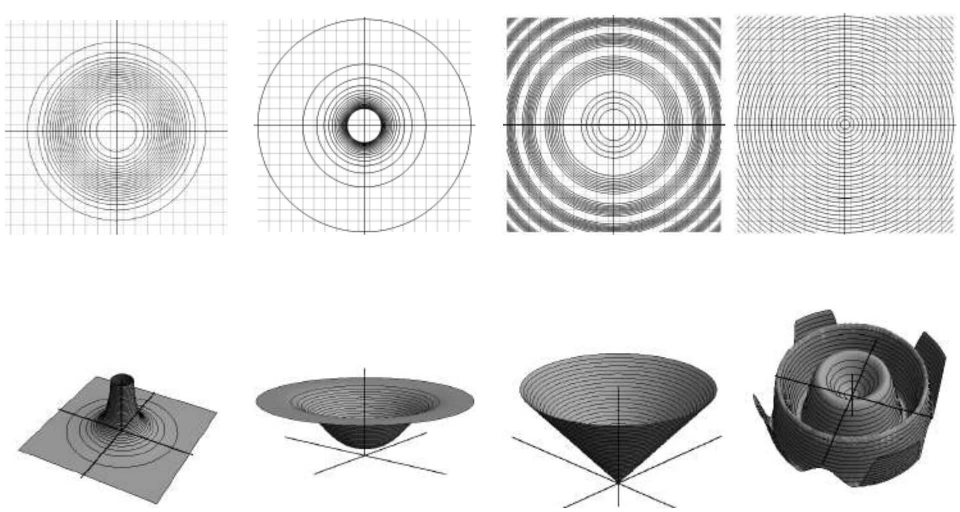
3. En cada caso graficar 4 curvas de nivel comenzando en el $f(x,y)=c_0$ y con el Δf indicados.

   (a) $f(x,y)=y-x$, $c_0=-3$, $\Delta f=1$.
   En este caso, las curvas de nivel corresponden a $c_0=-3$, $c_1=c_0+\Delta f=-2$, $c_2=c_1+\Delta f=-1$ y $c_3=c_2+\Delta f=0$.

   (b) $g(x,y)=y+x^2$, $c_0=-2$, $\Delta g=1$

   (c) $w(x,y)=\ln(x+y)$, $c_0=1.5$, $\Delta w=-0.5$

4. Asociar cada mapa de contorno con la gráfica de la función correspondiente.



5. En cada caso graficar 3 superficies de nivel comenzando en el $f(x,y,z)=c_0$ y con el Δf indicados.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $c_0 = 0$, $\Delta f = 2$

(b) $g(x,y,z) = x + y + z$, $c_0 = 6$, $\Delta g = -1$

6. Considerar que la temperatura medida en ^oC en cierta región del plano está dada por la función $T(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ y que una partícula puntual se encuentra en el punto $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

   (a) ¿Cuál es la temperatura a la que se encuentra la partícula?

   (b) Hallar y graficar el conjunto de puntos del plano que se encuentran a la misma temperatura que la partícula.

7. Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la curva de nivel 0 de la función $f(x,y) = e^{xy} - x^2$,

$$(1,0) \qquad (0,2) \qquad (-1,0) \qquad (1,1)$$

8. Considerar una función $f(x,y)$ y dos constantes c_1 y c_2 distintas. ¿Es posible que las curvas de nivel $f(x,y) = c_1$ y $f(x,y) = c_2$ tengan algún punto en común?

9. Para distintos valores de u graficar aproximadamente el conjunto $\{(x,y,z)/f(x,y,z) = u\}$. En otras palabras, determinar las distintas superficies de nivel.

$$\begin{array}{llll} (a) & f(x,y,z) = x+y+z & (b) & f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 \\ (c) & f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 & (d) & f(x,y,z) = x^2+2y^2 \end{array}$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2023

Práctica 2 - Funciones de varias variables. Límites. Continuidad
Segunda parte

B. Límites y continuidad de funciones de varias variables

10. Para cada uno de los siguientes conjuntos, hallar los puntos de acumulación, la frontera, el interior y la clausura. Indicar si son cerrados, abiertos o ninguna de las dos cosas.

    (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \frac{x^2}{4} + y^2 < 7\}$
    (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$
    (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (0, 1 - \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$
    (d) $D = B \cup C$
    (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
    (f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$
    (g) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z \leq 2\}$

11. Demostrar que para todo $x, y, u \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes desigualdades. Estas desigualdades son muy útiles y se podrán usar en los ejercicios siguientes.

    (a) $x^2 \leq x^2 + y^2$ (b) $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ (c) $|xy| \leq x^2 + y^2$ (d) $|x| \leq |x| + |y|$ (e) $|\text{sen}\, u| \leq |u|$

12. (a) Calcular los siguientes límites. Luego demostrarlos por definición

    $$\text{i. } \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\pi x^2)}{x} \qquad\qquad \text{ii. } \lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 3x}{x - 1}$$

    (b) Demostrar, por definición de límite, las siguientes igualdades:

    $$\text{i. } \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2x + y = 2 \qquad\qquad \text{ii. } \lim_{(x,y)\to(1,-8)} xy = -8$$

    (c) Encontrar un $\delta > 0$ adecuado tal que

    $$\text{Si } 0 < \|(x, y) - (1, -8)\| < \delta, \text{ entonces } |xy + 8| < \epsilon,$$

    para los casos $\epsilon = 1$, $\epsilon = 1/100$.

(*) Los ejercicios 13.*, 14.* y 15.* pueden llegar a ser algo mas difíciles para demostrar que los demás, pero sus resultados son muy útiles para ser utilizados en la resolución de otros límites. Lean los enunciados con atención.

13. * Sea $f : B_r(a, b) \to \mathbb{R}$ tal que f no se anula sobre $D_r(a, b) - \{(a, b)\}$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que

    $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\text{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1.$$

    Una idea: usar el límite conocido en una variable $\lim_{u\to 0} \frac{sen\ u}{u} = 1$ en su versión por definición.

14. * Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x, y)| = |L|$.

15. * Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, entonces para cualquier ϵ elegido, existe $\delta > 0$ tal que

    $$\text{si } 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta, \text{ entonces } |f(x, y)| < |L| + \epsilon.$$

    Observación útil: Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, la función está acotada en un entorno de (a, b); es decir existe $M > 0$ tal que para cierto $\delta > 0$ se cumple que $|f(x, y)| < M$ para todo (x, y) del dominio con $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$.

    (basta con elegir $\epsilon = 1/2$, por ejemplo, y tomar $M = |L| + 1/2$).

16. Considerar las funciones

$$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad g(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2},\qquad h(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

(a) Determinar el dominio de cada una de ellas.

(b) Estudiar la existencia del límite en el origen y, en caso de existir, determinar su valor.

17. Comprobar que los siguientes límites no existen,

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,5)}\frac{x^2+3(y-5)^2}{x^2+(y-5)^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy\cos x}{x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x\ln(y)}{x^2+(\ln(y))^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{3x^2y^2+(x-y)^2}$

18. Determinar si los siguientes límites existen. En caso afirmativo comprobarlo por definición. En las demostraciones se puede hacer uso de las desigualdades demostradas en el ejercicio 11 y los resultados de los ejercicios 13.*, 14.* y 15.*.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy-y}{|x-1|+|y|}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xe^x+ye^x}{x+2y}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+7y^4\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3\sqrt{y}x^3}{x^4+y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{xy+y-x}$ (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

19. Encontrar un valor posible L para los siguientes límites y luego demostrarlos. Pueden intentar hacerlo por definición o hacer uso de la propiedad de la compresión para acotar $|f(x,y)-L|$ por una función que tienda a 0.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\ln\left(\frac{4x^2+7y^2}{2x^2+5y^2}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{e^{xy}-1}{x}$

20. Consideremos las funciones del ejercicio 16.

(a) Determinar el conjunto donde cada una ellas es continua.

(b) ¿Cuáles de estas funciones pueden redefinirse en el origen de manera que resulten continuas en ese punto?

21. En cada uno de los siguientes casos determinar el conjunto del plano donde la función es continua. En el caso de presentar discontinuidades evitables, redefinir la función para que resulte continua.

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x-3)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(3,0)\,;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(3,0)\ \text{ó}\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $h(x,y)=\begin{cases}4x^2+y^2 & \text{si } x\geq y/2\\ 8 & \text{si } x<y/2\end{cases}$ (d) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sqrt[3]{x}}{x+y^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

22. Estudiar la continuidad de $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en $(0,0)$.

23. Estudiar la continuidad de

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^3-y^3}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

en todos los puntos de su dominio.