Análisis Matemático I (1er cuatrimestre 2024)
Física Médica

TRABAJO PRÁCTICO 6

Ejercicio 1. a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $x = 0$ de las siguientes funciones. Graficar cada función y el polinomio asociado.

i) $f(x) = e^x$

ii) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

iii) $f(x) = \ln(x+1)$

b) Utilizar los polinomios hallados en el inciso a) para calcular el valor aproximado de $e^{0,2}$, $\operatorname{sen}(-0,1)$ y $\ln(1,4)$.

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \sqrt{ax+1}$ y $p(x) = 1 + 2x + bx^2$. Determinar los valores de a y b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $x = 0$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada segunda continua. Si $2y + 6x - 4 = 0$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$ y $f''(0) = -1$, escribir el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x)$ centrado en $x = 0$.

Ejercicio 4. Sean f y g funciones con sus primeras dos derivadas continuas. El polinomio de Taylor de f de orden 2 alrededor de $x = 0$ es $P_{2,0}(x) = 1 + \frac{3}{2}x + 4x^2$. El polinomio de Taylor de g de orden 2 alrededor de $x = 0$ es $Q_{2,0}(x) = -x^2$. Calcular el polinomio de Taylor de $h(x) = f(x).g(x)$ de orden 2 alrededor de $x = 0$.

Ejercicio 5. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \ln(x)$ alrededor de $x = 1$. Utilizar este polinomio para aproximar el valor de $\ln(9/10)$ y acotar el error cometido.

Ejercicio 6. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ alrededor de $x = 8$. Utilizar este polinomio para aproximar el valor de $\sqrt[3]{8,3}$ y acotar el error cometido.

Ejercicio 7. Utilizar un polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ para calcular el valor de $e^{1/5}$ con un error menor que 10^{-3}.

Ejercicio 8. Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^r$, siendo r un número real fijo.

a) Demostrar que cerca de $x = 0$, la función f puede aproximarse con primer orden por $1 + rx$, y con segundo orden por $1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2$.

b) Estimar el valor de $\sqrt{1,1}$ a orden 2, eligiendo valores adecuados de r y de x. Calcular una cota para el error cometido y comparar con el valor de $\sqrt{1,1}$ que arroja la calculadora.

Ejercicio 9. (*Optativo*)

Calcular los siguientes límites utilizando un desarrollo de Taylor adecuado:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - x + 1}{(x-1)^2}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x}$