Análisis Matemático I (1er cuatrimestre 2024)
Física Médica

TRABAJO PRÁCTICO 5

Ejercicio 1. Esbozar la gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$
- $y = 1$ es asíntota horizontal
- $f'(x) < 0$ en $(2, +\infty)$ y $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$
- $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$ y $f''(x) > 0$ en $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$

Ejercicio 2. Graficar las siguientes funciones explicitando en cada caso, si es posible:

- Dominio. Puntos de discontinuidad. Intersecciones con los ejes coordenados.
- Comportamiento de la función cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, indicando si tiene asíntotas horizontales.
- Valores de x en los cuales la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, a izquierda o a derecha, indicando si tiene asíntotas verticales.
- Puntos críticos. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Máximos y mínimos, locales y absolutos.
- Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = xe^{-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

e) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 1}$

g) $f(x) = e^{\arctan(x)}$

h) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es la resolución de problemas de optimización. En estos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absoluto de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico, económico o físico.

Para resolver los siguientes ejercicios, sugerimos:

- Realizar, de ser posible, un dibujo o esquema de la situación.
- Elegir las variables con las que se va a trabajar.
- Analizar las relaciones entre las variables para proponer la expresión de la función que se va a optimizar.
- Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de la función que definiste
- Determinar el máximo o mínimo absoluto (según corresponda) de la función definida en el dominio planteado.
- Presentar la respuesta a la consigna que figura en el enunciado.

Ejercicio 3. Se cuenta con 100 metros de alambre para construir un corral rectangular. Determinar las dimensiones del corral para que su área sea la máxima posible.

Ejercicio 4. Hallar el punto sobre parábola de ecuación $y = \dfrac{1}{4}x^2$ que se encuentra más próximo al punto $(1, 2)$.

Ejercicio 5. Una escalera de 2 m de largo se apoya sobre una pared, llegando hasta una altura h. ¿Cuál debe ser esta altura para que el área del triángulo formado por la pared, el suelo y la escalera tenga el área máxima?

Ejercicio 6. Con un cartón de 80 cm por 1,5 mts se planea fabricar una caja rectangular sin tapa cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados hacia arriba. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que se pueda hacer de este modo?

Ejercicio 7. Se desea minimizar la cantidad de material al confeccionar un tanque de agua recto de base cuadrada y sin tapa, de manera tal que el volumen sea de 32 m^3.

Hallar las dimensiones del tanque con estas características.

Ejercicio 8. Se va a realizar un cantero de flores en forma de sector circular de radio r y ángulo central θ. El área del cantero debe ser $4\pi^2 m^2$. Encontrar r y θ de manera que el perímetro del cantero sea mínimo para los casos:

a) $0 \leq \theta \leq \pi$

b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 9. Se desea fabricar una lata de aceite en forma de cilindro que va a contener 1000 cm^3 de aceite. ¿Qué dimensiones deberá tener de modo que minimice la cantidad de material?

Ejercicio 10. Se lanza una flecha desde el origen de coordenadas siguiendo una trayectoria dada por la parábola $y = -\frac{9{,}8}{2}\frac{x^2}{\cos^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,x$, donde θ es el ángulo inicial, comprendido entre $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$. Determinar el valor de θ para el cual la flecha toca el suelo a la mayor distancia posible del origen.

Ejercicio 11. (*Optativo*)

Sean A y B dos puntos ubicados por encima del eje x y C un punto sobre el eje x tal como indica la figura. Demostrar que la suma de las distancias $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ es mínima cuando $\alpha = \beta$.