Análisis Matemático I (1er cuatrimestre 2024)
Física Médica

TRABAJO PRÁCTICO 4

Ejercicio 1. a) Calcular por definición la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

i) $f(x) = 2x^2$, en el punto de abscisa $x = 1$.

ii) $h(u) = u^3 - 4$, en el punto de abscisa $u = 0$.

iii) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las funciones del inciso anterior en los puntos indicados. Graficar las funciones y las rectas.

Ejercicio 2. Hallar, si existen, las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ que pasan por el punto $(2, 1)$.

Ejercicio 3. Hallar, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $s(x) = 3x^2 - 2x + 1$ que es perpendicular a la recta de ecuación $4y + x - 12 = 0$. Graficar.

Ejercicio 4. Teniendo en cuenta las reglas de derivación (regla del producto, regla del cociente, regla de la cadena, etc), hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \pi x^7 - 8x^{-5} + x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 5}$

c) $f(x) = (x^4 + x^2 + \pi)^{-\frac{3}{4}}$

d) $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{3}\right)^8 \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^6$

e) $f(x) = \sqrt[5]{(x + 1)^3 + 4x^8}$

f) $f(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)}$

g) $j(x) = \cos\left((2x + 3)^2\right)$

h) $g(x) = \tan\left(\mathrm{sen}\,\sqrt{x}\right)$

i) $h(x) = \mathrm{sen}^3\left(\sqrt{x - 2}\right)$

j) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

l) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

m) $g(x) = \dfrac{x \arctan(x^2 - 1)}{3x - 4}$

n) $h(v) = \arcsin\left(\dfrac{v - 3}{v + e^{2v}}\right)$

ñ) $f(t) = \ln(t^2 - 4) \arccos\left(\sqrt{t - 3}\right)$

Ejercicio 5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente:

a) Si f es continua en $x = 4$, entonces f es derivable en $x = 4$.

b) Si $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$, entonces f no es derivable en $x = 3$.

c) Si la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ es $\frac{1}{2}y - x - \frac{5}{2} = 0$, entonces $f'(1) = 2$.

d) Si la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 8$ es $y = 4x + 3$, entonces $f'(8) = 4$ y $f(8) = 3$.

Ejercicio 6. Calcular las derivadas laterales de $f(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$ en $x = 0$ y determinar si f es derivable en dicho punto.

Ejercicio 7. Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

a) Probar que f es continua en $x = 1$.

b) Analizar si f es derivable en $x = 1$.

Ejercicio 8. Analizar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2)^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en su dominio. Graficar.

Ejercicio 9. Sea f la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar el valor de a y b para que la función resulte continua y derivable en $x = 1$.

Ejercicio 10. Determinar, justificando, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje x, debe haber al menos dos puntos en los que la recta tangente sea horizontal.

b) Si un polinomio tiene tres raíces reales, debe haber al menos dos puntos en su gráfica en los que la recta tangente es horizontal.

Ejercicio 11. En una carrera, dos autos parten del mismo lugar al mismo tiempo y llegan juntos a la meta.

Mostrar que en algún momento de la carrera, ambos autos fueron a la misma velocidad.

Ejercicio 12. Un auto recorre una ruta de Argentina en la cual la velocidad máxima permitida es de $110\, km/h$.

Un radar detecta que el auto está en el km 75 de dicha ruta a las 14:00 hs. y otro radar detecta que el auto pasó por el km 215 a las 15:10 hs.

Justificar por qué el conductor del auto cometió al menos una infracción entre las 14 hs.y las 15:10 hs.

Ejercicio 13. Un cubo se expande de manera que su lado está cambiando a razón de 5 m/seg. Hallar la razón de cambio de su volumen cuando su arista mide 4m de longitud.

Ejercicio 14. a) Hallar los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes, decrecientes, cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo:

i) $g(x) = x\ln(x)$

ii) $h(x) = xe^{-x}$

iii) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

b) Hallar, si existen, los extremos relativos de las funciones del inciso anterior.

Ejercicio 15. a) Justificar, sin realizar cuentas, que las siguientes funciones poseen extremos absolutos en los intervalos indicados.

- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, $x \in [-1, 3]$
- $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$, $x \in [0, \pi]$

b) Hallar los extremos absolutos de dichas funciones.

Ejercicio 16. Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

a) Mostrar que f admite inversa en el intervalo $(0, +\infty)$. Determinar $Dom(f^{-1})$.

b) Hallar el valor de $(f^{-1})'(0)$ de dos formas distintas:

   I) Utilizando la fórmula para la derivada de la función inversa: $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, donde $y_0 = f(x_0)$.

   II) Hallando la expresión de la función inversa y derivando dicha función.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en $x = 0$.

Ejercicio 17. Sea f una función derivable y monótona tal que $f(1) = 3$ y $f'(1) = 8/3$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en $x = 3$.