Análisis Matemático I (1er cuatrimestre 2024)
Física Médica

TRABAJO PRÁCTICO 3

Ejercicio 1. Supongamos que $\lim_{x\to 3} f(x) = -2$ y $\lim_{x\to 3} g(x) = 4$. Calcular los siguientes límites indicando las propiedades utilizadas:

a) $\lim_{x\to 3} -\frac{1}{2}f(x) + 5g(x)$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)+2}{g(x)}$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{4f(x)g(x)}{g(x)-2}$

Ejercicio 2. Responder las siguientes preguntas, justificando la respuesta:

a) Si no existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

b) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

c) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿se puede asegurar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

Ejercicio 3. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x}{x+1}$

d) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$

e) $\lim_{x\to \frac{1}{3}} \frac{2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x}{-3x^2-11x+4}$

f) $\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

g) $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Ejercicio 4. Determinar si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1}, & x < 1 \\ -3x^5-2x, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x+7, & x < 1 \\ \dfrac{2x^2-2x}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$

Ejercicio 5. Hallar, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{4x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(3x-6)}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^2+2x-3)\operatorname{sen}(x+1)}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{4x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2+x}$

Ejercicio 6. Sea $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x}$

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) En base al resultado del inciso a), determinar si la gráfica de f posee asíntota vertical en 1. ¿Cuál es la ecuación de dicha asíntota?

c) ¿Posee la gráfica de f alguna otra asíntota vertical? ¿Cuál es la ecuación de la misma?

Ejercicio 7. Determinar si las gráficas de las siguientes funciones poseen asíntotas verticales, indicando las ecuaciones de las mismas:

a) $h(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x}$

b) $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

d) $p(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-\frac{\pi}{2})}$

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites y determinar si las gráficas de las funciones poseen asíntotas horizontales, indicando las ecuaciones de las mismas:

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3+2x^{3/5}-4}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{4x^5-6x^3+2x}{7x^5+3x^4-2}$

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ (*Pista*: Usar el Teorema del Sándwich)

Ejercicio 9. Determinar si las gráficas de las siguientes funciones poseen asíntotas horizontales, indicando las ecuaciones de las mismas.

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^{1/3} - 3x^5 + e^x}{x^4 - \ln(x) + 1}$

d) $f(x) = x^2 e^x$

Ejercicio 10. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demostrar aquellas que sean verdaderas o dar un contraejemplo para aquellas que sean falsas.

a) Si $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 5$, entonces $g(3) = 5$.

b) Si existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, entonces f es continua en $x = 2$.

c) Si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$, entonces f es discontinua en $x = 1$.

Ejercicio 11. Analizar si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados. Clasificar las discontinuidades.

a) $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) - 2, & x < -\frac{\pi}{2} \\ -\cos(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \sqrt{x - \pi} + 1, & \pi \leq x \end{cases}$ en $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$

b) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < -1 \\ e^x, & -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \end{cases}$ en $x = -1$ y $x = 1$

c) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x}, & x < 0 \\ 1 + \ln(2x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Ejercicio 12. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales cada una de las siguientes funciones resulta continua en $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + ax + 2x + 2}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Ejercicio 13. Utilizando el Teorema de Bolzano, determinar los intervalos donde las siguientes funciones son positivas y los intervalos donde son negativas.

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - x}$

b) $g(x) = x \ln(2x + 5)$