En este apunte introductorio repasaremos algunos conceptos básicos de matemática que serán necesarios para el estudio de funciones en una variable, que es el tema central de la materia.

Valor absoluto

El **valor absoluto** (o módulo) de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su signo, sea este positivo $(+)$ o negativo $(-)$. El valor absoluto lo escribiremos entre barras verticales.

Ejemplos:

- $|-5| = 5, |5| = 5$, *es decir* 5 *es el valor absoluto de* 5 *y de* -5
- $|-\pi| = \pi$
- $|0| = 0$

En forma genérica, el valor absoluto se define:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Observación importante: En general, cuando calculamos la raíz cuadrada de un número $b \geq 0$ lo que hacemos es buscar un número real positivo a tal que su cuadrado sea el radicando b:

$$\sqrt{b} = a \quad \leftrightarrow \quad a^2 = b.$$

En general, si el signo de a es desconocido, y queremos hallar un número b, tal que

$$a^2 = b \text{ entonces } \sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Esto mismo ocurre para las raíces de índice par. Es decir, que si n es un número par, entonces tenemos que $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, mientras que si n es un número impar, entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Notación de intervalos

El orden de los números reales nos permite hablar del conjunto de los números reales comprendidos entre dos números determinados.

Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$; tales que $a < b$, llamaremos **intervalo** al conjunto formado por todos los números reales que están entre a y b. Estos conjuntos reciben distintos nombres de acuerdo a si los números a y b están incluidos o no en dichos conjuntos. A estos números a y b se los llama **extremos** del intervalo.

Un intervalo **cerrado** incluye a ambos extremos y a los reales entre los extremos, su notación por comprensión es:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

Un intervalo **abierto** incluye a los reales entre los extremos, pero no a ellos:

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$$

Los intervalos **semiabiertos** incluyen a un solo extremo y a los reales entre los extremos. Podemos encontrar las siguientes situaciones:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$$

Existen otros tipos de intervalos que tienen un solo extremo. Este tipo de intervalos se denominan infinitos.

$$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R}: x < b\}$$

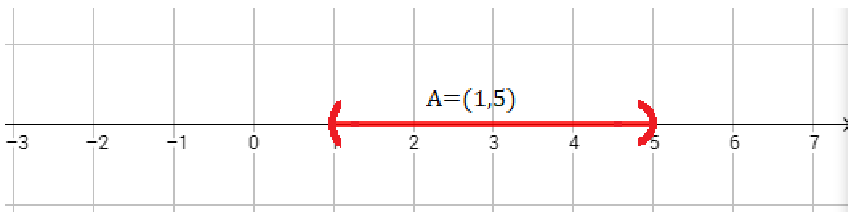
$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$$

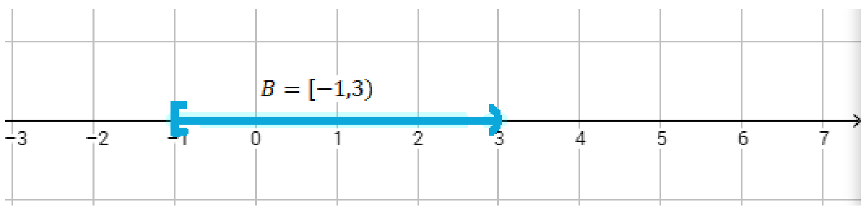
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$$

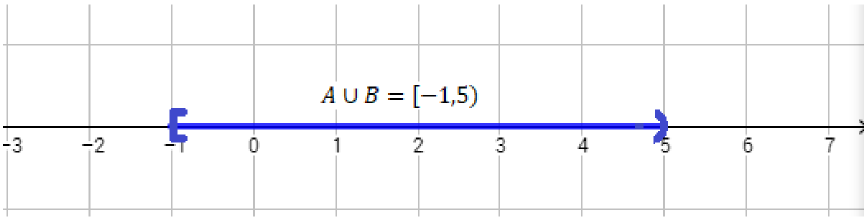
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$$

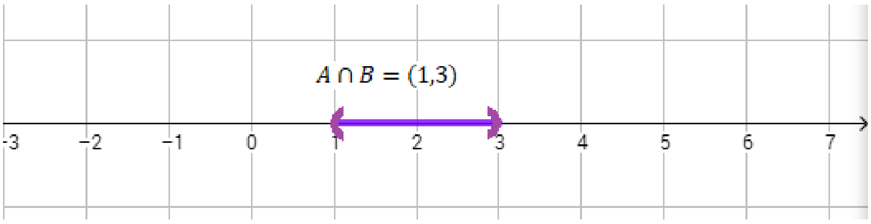
Los intervalos son subconjuntos de la recta real, por lo tanto, podemos efectuar las operaciones de unión e intersección sobre ellos.

<u>Ejemplo:</u> *Si* $A = (1{,}5)$ *y* $B = [-1{,}3)$, *tenemos que* $A \cup B = [-1{,}5)$ *y* $A \cap B = (1{,}3)$.

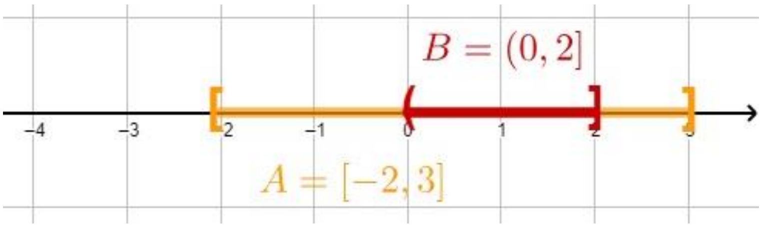








***<u>Ejemplo</u>**: Si $A = [-2,3]$ y $B = (0,2]$, tenemos que $B \subset A$. Observemos en este caso que, $A \cup B = A$ y $A \cap B = B$.*



<u>Ecuaciones</u>

Se llama **identidad** a una igualdad algebraica que se satisface para cualquier valor que se le atribuya a las incógnitas o variables que en ella figuren. Por ejemplo, una identidad es $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ porque se mantiene la igualdad para cualquier valor que se le asigne a a y b.

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas **miembros**, separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes y el término desconocido o **incógnita** se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: "x", "y" o "z", aunque puede utilizarse cualquier otra letra.

Las soluciones de la ecuación son los valores numéricos que deben tomar las incógnitas para que la igualdad sea cierta. Es decir, al sustituir estos valores por las letras en la ecuación y operar, obtenemos una igualdad. Resolver una ecuación es calcular la o las soluciones de la misma. Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación lo llamamos **conjunto solución**.

***<u>Ejemplo</u>:** Comprobar que $x = -5$ es solución de la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$*

Si reemplazamos por $x = -5$ en la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$, verificamos que

$$2.(-5) - 3 = 3.(-5) + 2$$

$$-10 - 3 = -15 + 2$$

$$-13 = -13$$

Como se cumple esta igualdad, sabemos que -5 pertenece al conjunto solución.

Ecuaciones lineales

Una **ecuación de primer grado o lineal** es equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

Para hallar las soluciones de una ecuación lineal se debe operar con ecuaciones equivalentes mediante el uso de propiedades hasta obtener una ecuación del tipo $x = c$.

Si $ax + b = 0$, tenemos que

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Entonces $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Ecuaciones cuadráticas

Se llama **ecuación cuadrática** a toda ecuación que es equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ , con } a \neq 0$$

Cada uno de los términos de la ecuación recibe un nombre en relación al exponente al que está elevada la variable, y estos son:

$$\underbrace{ax^2}_{\substack{Término\\cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\substack{Término\\lineal}} + \underbrace{c}_{\substack{Término\\independiente}} = 0$$

Si logramos expresar la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ como $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$, podríamos hallar fácilmente las soluciones de la ecuación. Veremos a continuación un método para lograrlo, conocido como completar cuadrados.

Si realizamos los cálculos necesarios, podemos probar que para cualquier valor de A es válida la siguiente identidad que se conoce como **cuadrado de un binomio**:

$$(x + A)^2 = x^2 + 2Ax + A^2$$

Ejemplo: *Supongamos que tenemos la ecuación cuadrática* $x^2 + 6x - 1 = 0$

Si comparamos la expresión $x^2 + 6x - 1$ *con* $x^2 + 2Ax + A^2$*, vemos que ambas tienen el mismo término cuadrático, por lo que, comparando los términos lineales, podemos ver que se debe cumplir que* $2A = 6$*, es decir, que* $A = 3$ *para que sean iguales.*

Ahora, si queremos escribir la expresión $x^2 + 6x - 1$ *en términos del cuadrado de un binomio, necesitamos tener el término correspondiente a* A^2*. Para esto sumaremos y restaremos* A^2*, es decir,* 3^2*.*

Entonces, $x^2 + 6x - 1 = \underbrace{x^2 + 2.3.x + 3^2}_{(x+3)^2} - 3^2 - 1 = (x+3)^2 - 10.$

Volviendo a la ecuación $x^2 + 6x - 1 = 0$*, tenemos que* $(x+3)^2 - 10 = 0$

Recordando que lo queremos expresar de la forma $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$ *tenemos en este caso que* $a = 1$*,* $\alpha = -3$ *y* $\beta = -10$*.*

Las soluciones serían $x_1 = \sqrt{-\frac{-10}{1}} + (-3) = \sqrt{10} - 3$ *y* $x_2 = -\sqrt{-\frac{-10}{1}} + (-3) = -\sqrt{10} - 3$

En general, si queremos hallar las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, podemos completar cuadrados como hicimos antes, lo que nos queda

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Si aplicamos raíz cuadrada a ambos lados, tenemos

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

es decir, que

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

por lo que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es decir, tenemos las soluciones

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Está fórmula es conocida como la **fórmula de Bhaskara** para hallar soluciones de la ecuación cuadrática.

Fórmula de Bhaskara: Las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Inecuaciones</u>

Una **inecuación** es una desigualdad en la que figuran variables o **incógnitas**. Resolverla es encontrar los valores de esas variables o incógnitas que la satisfacen.

<u>Símbolos $<, >, \leq$ y $\geq$</u>

Cuando tenemos dos números reales, siempre podemos compararlos para saber si uno es más grande que el otro o son iguales. Esto se puede representar usando símbolos matemáticos.

Si queremos representar que un número es mayor que otro, usaremos el símbolo **mayor que**, que se representa por "$>$". En este caso, se ubica el número mayor en el lado abierto del símbolo $>$ y el número menor al otro lado.

Tomemos como ejemplo el 3 y el 5. Sabemos que el 5 representa una mayor cantidad de elementos que el 3. Debemos escribir, por lo tanto, $5 > 3$. Esta expresión debe ser leída como "cinco es mayor que tres".

También usamos el símbolo $<$, que es leído como **menor que**. Con este símbolo podemos representar que tres es menor que cinco como $3 < 5$.

Por la misma razón, el signo $=$ define que ambas cantidades son iguales, no hay una mayor que otra. Por ejemplo, $3 + 5 = 8$.

Cuando se cumple alguna de las dos condiciones en una misma afirmación, podemos utilizar el símbolo de "mayor o igual que" representado por "$\geq$" o "menor o igual que", representado por "$\leq$". Al estudiar conjuntos numéricos, veremos más ejemplos del uso de estos dos símbolos.

<u>Resolución de inecuaciones</u>

Para resolver una inecuación, también es conveniente aplicar algunas propiedades (Leyes de monotonía) y así obtener una inecuación que tenga las mismas soluciones y sea más sencilla.

- Cuando el mismo número se suma o resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.
- El sentido de la desigualdad se conserva si ambos lados se multiplican o dividen por el mismo número positivo.
- Si se multiplica o divide por un número negativo en ambos lados de una desigualdad, se debe invertir el sentido de la desigualdad.

<u>Ejemplo</u>*: Si tenemos la inecuación* $x + 3 > 5$ *y restamos* 3 *a ambos miembros, tenemos*

$$x + 3 - 3 > 5 - 3 \qquad \rightarrow \qquad x > 2$$

Entonces, todos los valores de x *que sean mayores que* 2 *cumplirán esta desigualdad.*

<u>Ejemplo</u>*: Si tenemos la inecuación* $3x > 6$*, podemos dividir en ambos lados por* 3*, que es un número positivo, para obtener*

$$\frac{3}{3}x > \frac{6}{3} \qquad \rightarrow \qquad x > 2$$

Y podemos concluir que los valores de x *que son mayores que* 2 *satisfacen esta inecuación.*

Ejemplo: *Dada la inecuación $-x < -1$, podemos multiplicar en ambos lados de la desigualdad por -1, que es un número negativo, por lo tanto hay que tener cuidado en invertir el signo de la desigualdad:*

$$(-1).(-x) > (-1).(-1) \qquad \rightarrow \qquad x > 1$$

Entonces, todos los valores de la variable x que sean mayores que 1 cumplen la inecuación dada.

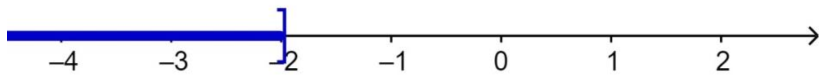
El conjunto solución de una inecuación es el conjunto de números reales que, al ser reemplazados por la variable, hacen cierta la desigualdad. Este conjunto es un intervalo (o conjunto de intervalos) que se puede expresar como conjunto, con la notación de intervalos, o representar sobre la recta real.

Ejemplo: *Si tenemos la inecuación $-5x \geq 10$ operamos, y tenemos*

$$\frac{-5}{-5}x \leq \frac{10}{-5} \qquad \rightarrow \qquad x \leq -2$$

Observar que dividimos en ambos lados de la desigualdad por -5, que es un número negativo, por lo tanto, se invierte el signo de la desigualdad.

Es decir, que la solución es $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}$ o, en forma equivalente, el intervalo $(-\infty, -2]$ y gráficamente tenemos



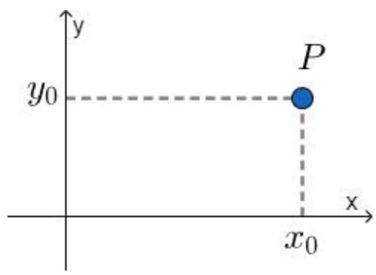
Plano coordenado: $\mathbb{R}^2$

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) recibe el nombre de **plano coordenado**, y lo denotamos $\mathbb{R}^2$. A la coordenada x del par ordenado se la conoce como **abscisa** y a la coordenada y como **ordenada.**

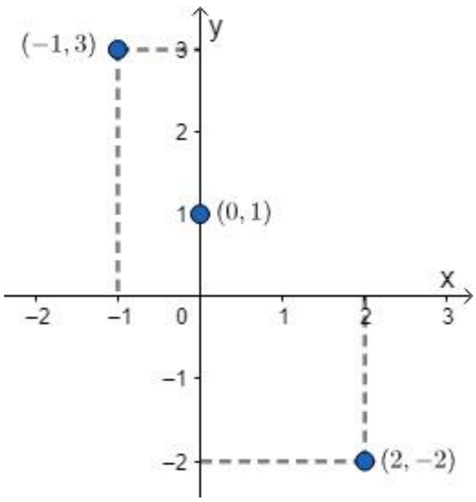
A cada par ordenado (x, y) de este conjunto le corresponde un punto del plano, como veremos a continuación.

La notación $\mathbb{R}^2$ es una forma reducida de expresar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es decir, cuando expresamos que el par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lo que estamos diciendo es que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

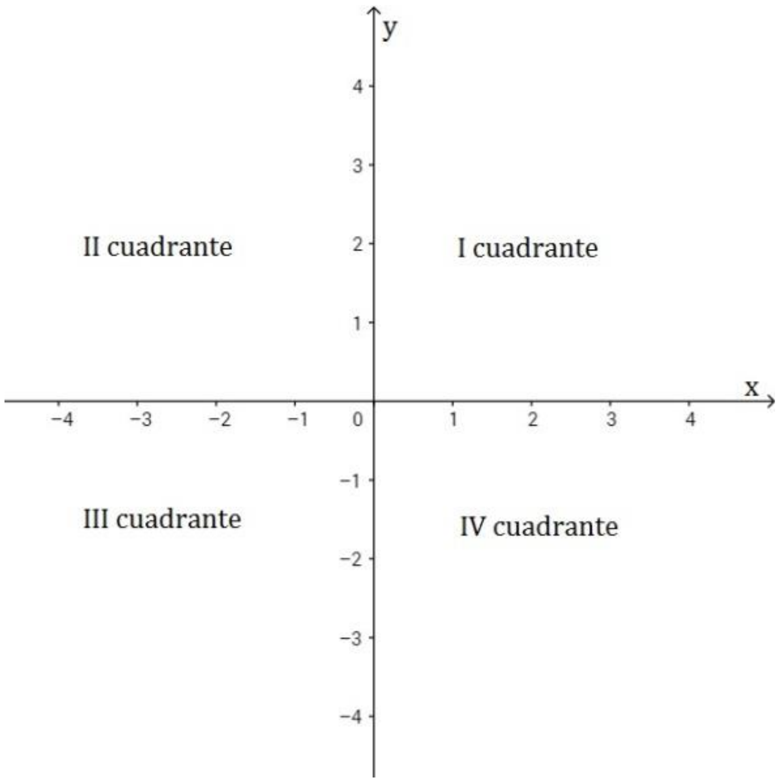
Puede identificarse $\mathbb{R}^2$ con el conjunto de todos los puntos del plano. Para ello, se trazan dos rectas: una horizontal, llamada **eje x** y una vertical, llamada **eje y**. El punto de intersección de los ejes recibe el nombre de **origen** u **origen de coordenadas** y se denota por O. Se establece una unidad de medida, que puede o no ser la misma para ambos ejes. El sentido positivo del eje x es hacia la derecha del origen, y el sentido positivo del eje y es hacia arriba del origen. De este modo, si queremos ubicar el punto $P(x_0, y_0)$ obtenemos



Si tenemos que graficar los puntos $(-1,3)$, $(2,-2)$ y $(0,1)$ tenemos:

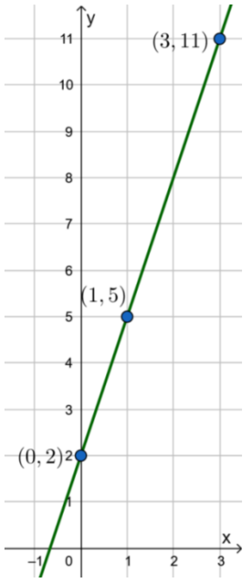


A los ejes x e y se los llama **ejes coordenados o cartesianos.** Estos dividen al plano en cuatro partes denominadas **cuadrantes**. El primer cuadrante es aquel en que la abscisa y la ordenada son ambas positivas, esto es el cuadrante superior derecho, y luego se numeran siguiendo el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj: primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y, por último, cuarto cuadrante.



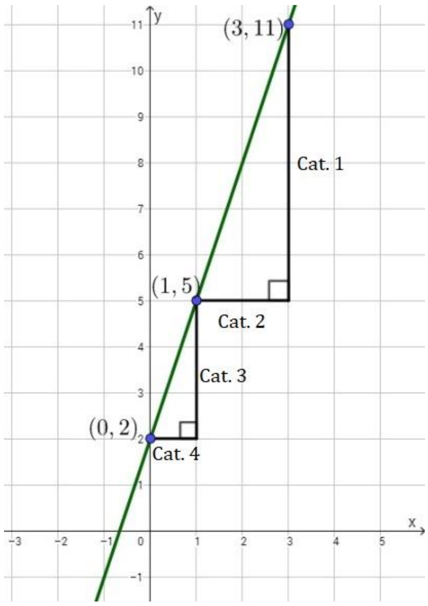
Recta en el plano

Supongamos que tenemos una recta representada como en el siguiente gráfico:



Queremos hallar la ecuación lineal que tiene a esta recta como gráfica.

Si bien sabemos que solo dos puntos son suficientes para definir una recta, consideremos, para este ejemplo, los tres puntos dados. Observemos que los puntos $A(1,5)$, $B(3,11)$ y $C(0,2)$ pertenecen a la recta. Si dibujamos dos triángulos rectángulos, como se observa en la figura siguiente, podemos corroborar que son semejantes, dado que los cocientes de las longitudes de los catetos de los triángulos son iguales, es decir:



$$\frac{long(Cat.1)}{long(Cat.2)} = \frac{long(Cat.3)}{long(Cat.4)}$$

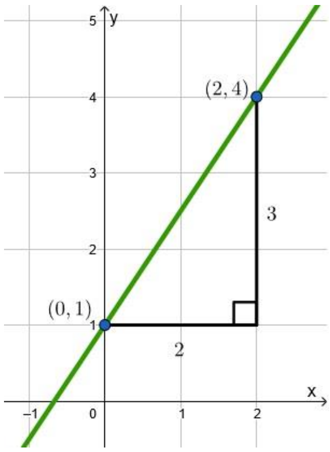
Si reemplazamos los valores correspondientes a las longitudes de los lados, tenemos:

$$\frac{11-5}{3-1} = \frac{5-2}{1-0} = 3$$

Esto ocurre independientemente de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta que elijamos. La constante que resulta del cociente se conoce como **pendiente de la recta** y se suele denotar por la letra m. En símbolos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Es decir, la pendiente de la recta es una proporción o razón entre la variación de las ordenadas (en el eje y) y la variación de las abscisas (en el eje x). La pendiente de una recta puede ser positiva, nula (cuando vale 0, es decir, que la recta es horizontal) o negativa.



Supongamos ahora que tenemos los puntos (0,1) y (2,4) y queremos hallar la ecuación que verifican todos los puntos de la recta que pasa por esos puntos.

En primer lugar, podemos calcular la pendiente de la recta, que será

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Como el punto (2,4) es uno de los puntos de la recta, si tomáramos cualquier otro punto $P(x, y)$ en la recta, se debería cumplir, tal como vimos antes, que el cociente de las longitudes de los catetos permanece constante y vale $\frac{3}{2}$.

Es decir, que se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{y-4}{x-2} = \frac{3}{2}$$

Si operamos en esta expresión para despejar la variable y obtenemos

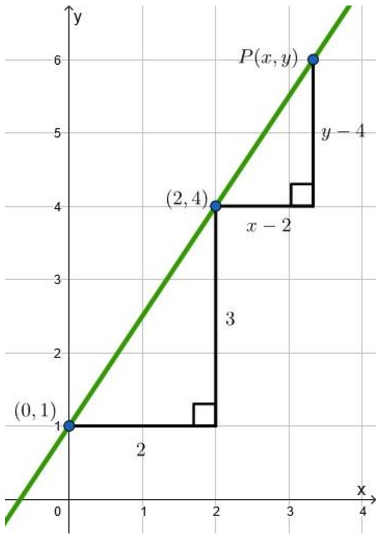
$$y - 4 = \frac{3}{2}(x-2)$$

que es la **ecuación punto-pendiente** de la recta.

Si operamos y despejamos y, tenemos

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

que es la ecuación explícita de la recta.



Esto quiere decir que cualquier punto (x, y) que esté sobre la recta debe satisfacer la ecuación de la recta y, recíprocamente, si un punto (x, y) satisface la ecuación, entonces el punto está sobre la recta. Por esta razón, como el punto (0,1) está en la recta, este debe satisfacer la ecuación. Efectivamente, esto es así, pues cumple la ecuación de la misma:

$$1 = \frac{3}{2}.0 + 1$$

Notemos, además, que la recta cortaba al eje y en $y = 1$, y, al escribir la ecuación explícita de la recta, la constante 1 aparece sumando en la ecuación.

En general, si tenemos una recta con pendiente m y sabemos que pasa por el punto (x_0, y_0), la ecuación **punto-pendiente** de la recta es

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

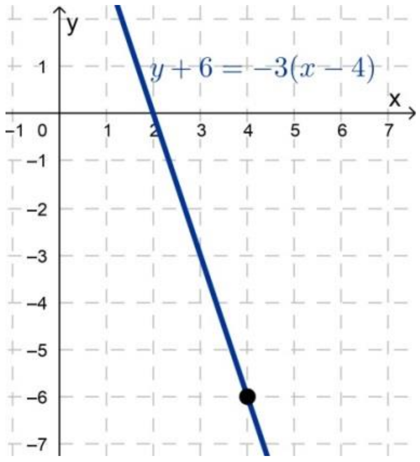
Se llama ecuación **explícita** de la recta a aquella de la forma

$$y = m.x + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen, es decir, el valor en el que la recta interseca al eje y.

También la ecuación de una recta puede ser expresada de manera que no se despeje ninguna variable y la ecuación esté igualada a cero, de la forma $Ax + By + C = 0$, y se la denomina **ecuación implícita** de la recta.

Ejemplo: *Hallar las ecuaciones punto-pendiente, explícita e implícita de la recta que tenga pendiente* -3 *y que pasa por el punto* $Q(4,-6)$ *y luego graficar la recta.*



- *Ecuación punto-pendiente:* $y-(-6)=-3(x-4)$
- *Ecuación explícita:* $y=-3(x-4)-6$

  $y=-3x+6$
- *Ecuación implícita:* $y+3x-6=0$

Ejemplo: *Hallar las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por los puntos* $(3{,}7)$ *y* $(1{,}4)$.

Comencemos hallando la pendiente de la recta. Para esto, tomaremos los puntos $(x_1,y_1)=(3{,}7)$ *y* $(x_2,y_2)=(1{,}4)$*. Tenemos, entonces, que la pendiente es*

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-7}{1-3}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

Para hallar la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por ambos puntos, recordamos la ecuación general: $y-y_0=m.(x-x_0)$

La pendiente hallada es $m=\frac{3}{2}$*. Además, podemos tomar un punto cualquiera en la recta, por ejemplo el punto* $(3{,}7)$ *y tenemos, entonces,*

$$y-7=\frac{3}{2}(x-3)$$

Para hallar la ecuación explícita de la recta, utilizamos la forma: $y=m.x+b$

Si reemplazamos $m=\frac{3}{2}$ *en la ecuación, obtenemos*

$$y=\frac{3}{2}.x+b$$

Para averiguar la ordenada al origen, podemos reemplazar alguno de los puntos de la recta en la ecuación, por ejemplo, reemplacemos el punto $(1{,}4)$

$$4=\frac{3}{2}.1+b$$

Al operar, obtendremos el valor de la incógnita b

$$4=\frac{3}{2}+b$$

$$4-\frac{3}{2}=b$$

$$\frac{4.2-3}{2}=b$$

$$\frac{5}{2}=b$$

Por lo tanto, la ecuación explícita de la recta es

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

Otra manera de hallar la ecuación explícita de la recta es partir de la ecuación punto-pendiente hallada en el inciso a), es decir

$$y - 7 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

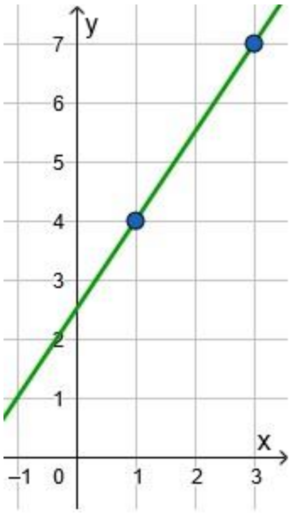
$$y = \frac{3}{2}(x - 3) + 7$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + 7$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

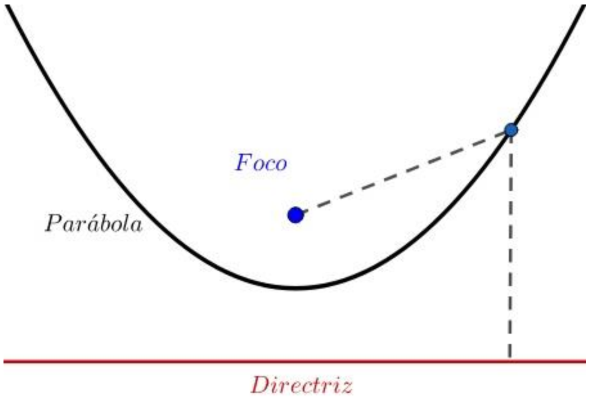
que resulta ser la misma expresión hallada más arriba con m y b.

Podemos representar esta recta ubicando los dos puntos en el plano y luego graficando la recta que pasa por los mismos:



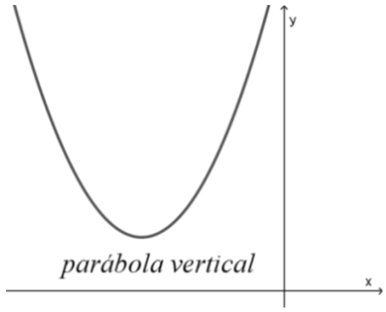
Parábola

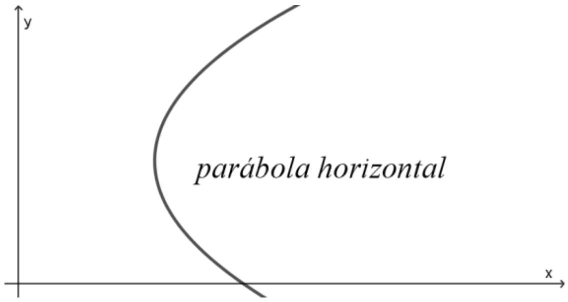
Una **parábola** es la curva formada por todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de una recta dada, denominada **directriz**, y de un punto dado, llamado **foco**.



El **vértice** de la parábola es el punto de la parábola que está más cerca de la directriz.

Las parábolas que tienen eje de simetría paralelo al eje y se llaman parábolas verticales, y las que tienen eje de simetría paralelo al eje x se llaman parábolas horizontales. En este momento solo trabajaremos con parábolas verticales.





Si bien se pueden estudiar muchas propiedades de las parábolas, solo nos concentraremos en algunos aspectos que nos resultarán útiles en el desarrollo de esta materia. En particular, nos interesará conocer los vértices de las parábolas y sus raíces (los valores para los cuales la parábola interseca el eje x).

En general, las parábolas verticales se pueden escribir de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde $a \neq 0$ (si tuviéramos $a = 0$ tendríamos la ecuación de una recta).

Si sacamos factor común a en los dos primeros términos y completamos cuadrados en la ecuación anterior obtenemos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$y = a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{(2a)^2}}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{(2a)^2}\right) + c$$

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$y - \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

$$y - \underbrace{\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}_{y_v} = a\left(x - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{x_v}\right)^2$$

El vértice de la parábola será el punto $V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Ejemplo: *Hallar las coordenadas del vértice de la parábola* $y = 3x^2 + 12x - 12$.

Una opción, sería sacar factor común 3 *y completar cuadrados para obtener:*

$$y = 3(x^2 + 4x) - 12$$
$$y = 3(x^2 + 4x + 4 - 4) - 12$$
$$y = 3((x + 2)^2 - 4) - 12$$
$$y = 3(x + 2)^2 - 12 - 12$$
$$y + 24 = 3(x + 2)^2$$
$$y - (-24) = 3\big(x - (-2)\big)^2$$

Entonces podemos concluir que el vértice es el punto $V(-2, -24)$.

Por otro lado, podríamos usar la ecuación $V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ *para obtener las coordenadas del vértice, reemplazado* $a = 3$, $b = 12$ *y* $c = -12$.

Al hacerlo obtenemos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2.3} = -\frac{12}{6} = -2$$
$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{12^2 - 4.3.(-12)}{4.3} = -\frac{144 + 144}{12} = -\frac{288}{12} = -24$$

Nuevamente, obtenemos que el vértice es el punto $V(-2, -24)$.

Otra opción, sería hallar $x_v = -2$ *con la fórmula anterior y luego reemplazar este valor de* x *en la ecuación de la parábola para obtener:*

$$y = 3.(-2)^2 + 12.(-2) - 12 = 3.4 - 24 - 12 = -24$$

Con lo cual volvemos a obtener el vértice $V(-2, -24)$.

Ejemplo: *Hallar las coordenadas del vértice de la parábola* $y = -x^2 + 8x - 12$.

Si sacamos factor común -1 *en los primeros dos términos y completamos cuadrados tenemos:*

$$y = -(x^2 - 8x) - 12$$
$$y = -(x^2 - 8x + 16 - 16) - 12$$
$$y = -((x - 4)^2 - 16) - 12$$
$$y = -(x - 4)^2 + 16 - 12$$
$$y = -(x - 4)^2 + 4$$
$$y - 4 = -(x - 4)^2$$

Por lo tanto, podemos concluir que el vértice es el punto $V(4,4)$.

Por otro lado, si quisiéramos encontrar las raíces de una parábola, lo que queremos encontrar son los valores de x que hacen que y sea 0, es decir, querríamos resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Y ya vimos que en este caso podríamos resolverlo completando cuadrados o utilizando la fórmula de Bhaskara.

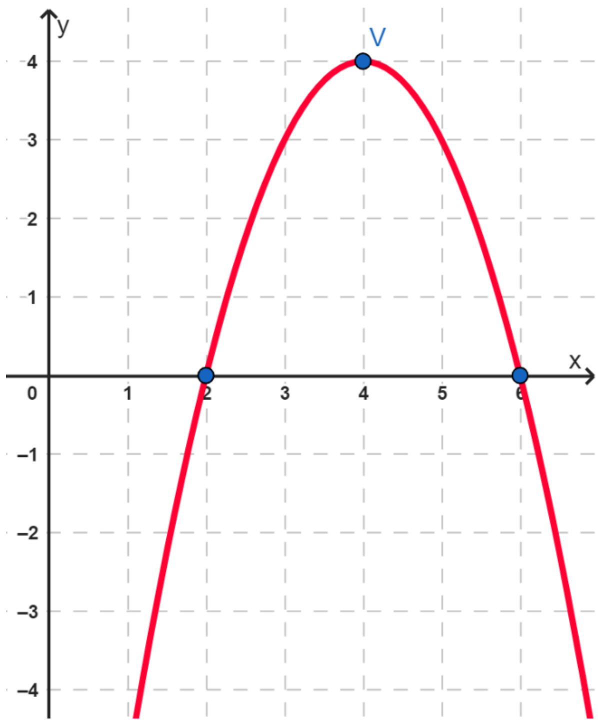
<u>Ejemplo</u>: *Si retomamos la parábola de ecuación $y = -x^2 + 8x - 12$, podríamos utilizar la fórmula de Bhaskara:*

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.(-1).(-12)}}{2.(-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2}$$

Con lo cual $x_1 = \frac{-8+4}{-2} = 2$ *y* $x_2 = \frac{-8-4}{-2} = 6$.

Es decir, que las raíces son $x = 2$ *y* $x = 6$.

Teniendo el vértice y las raíces, podemos dar un gráfico aproximado de la parábola:



<u>Observación</u>: A partir del estudio anterior, podríamos, además, concluir, que la expresión $-x^2 + 8x - 12$ toma valores positivos para $x \in (2,6)$ y toma valores negativos para $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión algebraica que puede expresarse de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ en la que los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural. El número a_n se conoce como **coeficiente principal**.

Llamaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de polinomios con coeficientes reales en la variable x.

Diremos que el número real a es una **raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Por el Teorema del Resto, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\boldsymbol{a} \textbf{ es raíz de } \boldsymbol{P(x) \leftrightarrow P(a) = 0 \leftrightarrow (x-a)} \textbf{ es factor de } \boldsymbol{P(x) \leftrightarrow (x-a)} \textbf{ divide a } \boldsymbol{P(x)}$$

Una propiedad útil a la hora de encontrar las raíces de un polinomio es la siguiente:

Un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces reales.

Es decir, si tenemos un polinomio de grado n y ya le conocemos n raíces, sabemos que no hay más raíces.

__Ejemplos__:

- $\mathrm{P(x) = 3x - 2}$ tiene una raíz: $\mathrm{x} = \frac{2}{3}$.
- $\mathrm{Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)}$ tiene dos raíces: $\mathrm{x_1 = 3}$ y $\mathrm{x_2 = -1}$.
- $\mathrm{R(x) = x^2 + 4}$ no tiene raíces reales.
- $\mathrm{S(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)}$ solo tiene una raíz real: $\mathrm{x = 0}$.

Un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ es **irreducible** si no se puede escribir como producto de polinomios de la forma $P(x) = Q(x).R(x)$, donde $Q(x)$ y $R(x)$ tienen grado menor que n o uno de ellos tiene coeficiente principal 1 y con el mismo grado de $P(x)$ y el otro es una constante distinta de 1.

Se puede ver que los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son los mónicos de grado 1 (lineales), y los de grado 2 mónicos que no tienen raíces reales.

Los polinomios que no son irreducibles, se los llama **reducibles**.

__Ejemplos:__

- *El polinomio $P(x) = x^2 + 4$ es irreducible, ya que, como no tiene raíces en los reales, no puede escribirse como el producto de dos polinomios de grado 1.*
- *El polinomio $P(x) = x^2 - 4$ es reducible, ya que $x^2 - 4 = (x-2).(x+2)$.*
- *El polinomio $P(x) = 2x - 7$ es reducible, ya que lo podemos factorizar como $P(x) = 2.\left(x - \frac{7}{2}\right)$.*

__Descomposición factorial__

El proceso de **factorizar un polinomio** consiste en expresarlo como producto de otros polinomios.

__Ejemplo__: *Las siguientes son dos factorizaciones distintas del polinomio:*

$$P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x:$$

$$P(x) = Q(x).R(x), \text{ donde } Q(x) = 2x^2 + 4 \text{ y } R(x) = x^2 - 3x.$$

$$P(x) = S(x).T(x), \text{ donde } S(x) = 2x \text{ y } T(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6.$$

*Sin embargo, cuando hablamos de la **descomposición factorial** de un polinomio $P(x)$, nos referimos a la factorización de $P(x)$, en la cual todos sus factores son polinomios irreducibles o polinomios de grado 0 (una constante).*

En el ejemplo anterior, la descomposición factorial de $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x$ es

$$P(x) = \underbrace{2}_{Constante} . \underbrace{(x^2+2).(x-3).x}_{\substack{Polinomios \\ irreducibles}}$$

Para hallar esta descomposición, se pueden utilizar distintos procedimientos o una combinación de ellos. Repasaremos algunos que nos serán útiles.

Factor común

Cuando hay un factor que está repetido en todos los términos de un polinomio podemos sacarlo como factor común.

Ejemplo: *Si $P(x) = -3x^5 + 12x^4 - 15x^3$, podemos ver que el factor $-3x^3$ está en los tres términos del polinomio, por lo que podemos sacarlo como factor común y obtenemos*

$$P(x) = -3x^3(x^2 - 4x + 5)$$

También podríamos considerar que el factor que es común en los tres términos del polinomio es $3x^3$, por lo que obtenemos:

$$P(x) = 3x^3(-x^2 + 4x - 5).$$

Trinomio cuadrado perfecto

Si recordamos que $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, podremos factorizar muchas expresiones que provengan de un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo: *Si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 9$, podemos reconocer que es un caso particular de trinomio cuadrado perfecto, cuando $a = -3$. Por lo tanto, tenemos que*

$$P(x) = (x - 3)^2,$$

donde $x - 3$ es un polinomio mónico irreducible, por lo que tenemos la descomposición factorial de $P(x)$.

Diferencia de cuadrados

Si recordamos que $x^2 - a^2 = (x - a).(x + a)$, podremos factorizar muchas otras expresiones.

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 25$, podemos reconocer que es un caso particular de diferencia de cuadrados, cuando $a = 5$. Por lo tanto, tenemos que

$$P(x) = (x - 5).(x + 5),$$

donde $(x - 5)$ y $(x + 5)$ son polinomios mónicos irreducibles, por lo que tenemos la descomposición factorial de $P(x)$.

Ejemplo: *Si $P(x) = x^2 - 2$, podemos notar que $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ y, entonces, obtenemos que*

$$P(x) = x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right).\left(x + \sqrt{2}\right)$$

Factorización de polinomios de grado 2

Recordemos que los polinomios de grado 2 son aquellos de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde $a \neq 0$.

En el caso de los polinomios de grado 2, la fórmula de Bhaskara nos permite encontrar las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que sabemos qué términos estarán en la descomposición factorial del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Ejemplo: *Si $P(x) = x^2 + 5x + 6$, tenemos que $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$, y entonces, podemos hallar las dos raíces del polinomio utilizando la fórmula de Bhaskara:*

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1}$$

por lo que las raíces son $x_1 = \frac{-5+\sqrt{25-24}}{2} = -2$ *y* $x_2 = \frac{-5-\sqrt{25-24}}{2} = -3$.

Luego, sabemos que los polinomios $x + 2$ *y* $x + 3$ *son factores del polinomio* $P(x)$*, por lo que*

$P(x) = (x + 2)(x + 3)$.

Ejemplo*: Si* $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$*, tenemos que* $\Delta = (-2)^2 - 4.3.1 = -8 < 0$*, por lo que la ecuación no tiene raíces reales y el polinomio es irreducible.*

Observación importante: Este método nos permite hallar polinomios mónicos irreducibles que son factores en la descomposición factorial del polinomio, pero no nos da el coeficiente principal. Al escribir la descomposición factorial no debemos olvidarnos de escribir ese coeficiente.

Ejemplo*: Si* $Q(x) = 2x^2 + 10x + 12$*, cuando aplicamos la fórmula de Bhaskara vamos a encontrar las mismas raíces que con* $P(x) = x^2 + 5x + 6$*. Esto es porque* $(x + 2)$ *y* $(x + 3)$ *son también factores del polinomio* $Q(x)$*. Sin embargo, la descomposición factorial de* $Q(x)$ *es*

$$Q(x) = 2(x + 2)(x + 3)$$

Para terminar, veremos cómo relacionar los conceptos que estuvimos repasando para resolver algunos ejercicios más.

Ejemplo: *Supongamos que queremos resolver la inecuación* $x^2 \leq x$

Si restamos x *en ambos lados de la desigualdad, obtenemos:*

$$x^2 - x \leq 0$$

Si factorizamos, nos queda:

$$x(x - 1) \leq 0$$

Es decir, queremos encontrar los valores que verifican que $x(x - 1)$ *es menor o igual que* 0*. Esto se puede dividir en dos partes: por un lado, analizar qué valores verifican que* $x(x - 1) = 0$*, lo cual es fácil, pues son* $x = 0$ *y* $x = 1$*. Por otro lado, debemos analizar para qué valores de* x *se verifica que* $x(x - 1) < 0$*. Recordemos que un producto de dos factores es negativo siempre que los dos tengan distinto signo, así que analizaremos estos dos casos:*

- *Si* $x > 0$ *y* $x - 1 < 0$*, entonces tenemos que* $x > 0$ *y* $x < 1$*, es decir, que* $x \in (0,1)$.
- *Si* $x < 0$ *y* $x - 1 > 0$ *entonces tenemos que* $x < 0$ *y* $x > 1$*, lo cual es imposible, es decir, que no tenemos más soluciones.*

Resumiendo, las soluciones son $x = 0$*,* $x = 1$ *y* $x \in (0,1)$*, lo cual podemos resumir diciendo que el conjunto solución es* $S = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$.

Ejemplo: *Si ahora queremos resolver la inecuación* $x^3 - x > 0$

Si factorizamos, nos queda:

$$x(x^2 - 1) > 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) > 0$$

Y ahora tenemos varios casos para analizar:

- *Si* $x > 0$*,* $x - 1 > 0$ *y* $x + 1 > 0$ *entonces* $x > 0$*,* $x > 1$ *y* $x > -1$*. Para que se cumplan estas tres condiciones simultáneamente debemos tener que* $x > 1$*, es decir que* $x \in (1, +\infty)$.

- *Si* $x > 0$, $x - 1 < 0$ *y* $x + 1 < 0$ *entonces* $x > 0$, $x < 1$ *y* $x < -1$, *lo cual es imposible.*
- *Si* $x < 0$, $x - 1 > 0$ *y* $x + 1 < 0$ *entonces* $x < 0$, $x > 1$ *y* $x < -1$, *lo cual es absurdo.*
- *Si* $x < 0$, $x - 1 < 0$ *y* $x + 1 > 0$ *entonces* $x < 0$, $x < 1$ *y* $x > -1$, *que se cumple cuando* $x \in (-1,0)$.

Es decir, que la solución es $S = (-1,0) \cup (1, +\infty)$.

***Ejemplo**: Si quisiéramos resolver la inecuación* $-x^3 + 4x^2 - 3x > 0$, *podemos factorizar el polinomio del lado izquierdo y obtenemos:*

$$-x(x^2 - 4x + 3) > 0$$

Utilizando Bhaskara, podemos factorizar el factor con el polinomio cuadrático y obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Es decir, que $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ *y entonces la inecuación resulta:*

$$-x(x - 3)(x - 1) > 0$$

Nuevamente, consideraremos varios casos:

- *Si* $-x > 0$, $x - 3 > 0$ *y* $x - 1 > 0$, *entonces* $x < 0$, $x > 3$ *y* $x > 1$, *lo cual es imposible.*
- *Si* $-x > 0$, $x - 3 < 0$ *y* $x - 1 < 0$, *entonces* $x < 0$, $x < 3$ *y* $x < 1$. *Para que se cumplan estas tres condiciones simultáneamente debemos tener que* $x < 0$, *es decir, que* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Si* $-x < 0$, $x - 3 > 0$ *y* $x - 1 < 0$, *entonces* $x > 0$, $x > 3$ *y* $x < 1$, *lo cual es imposible.*
- *Si* $-x < 0$, $x - 3 < 0$ *y* $x - 1 > 0$, *entonces* $x > 0$, $x < 3$ *y* $x > 1$. *Estas tres condiciones se cumplen si* $x \in (1,3)$.

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = (-\infty, 0) \cup (1,3)$.

***Ejemplo**: Supongamos que queremos resolver la siguiente ecuación:* $|x + 1| = |x|$

Utilizando la definición de valor absoluto tenemos que:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & si\ x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) & si\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

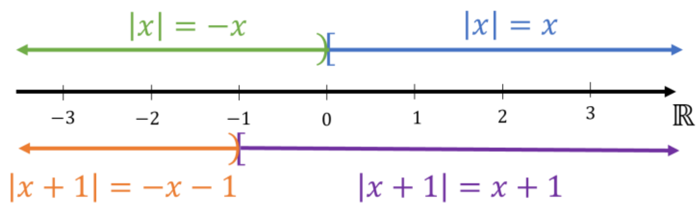
Es decir,

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & si\ x \geq -1 \\ -x - 1 & si\ x < -1 \end{cases}$$

Y, por otro lado,

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Si representamos en la recta numérica tenemos:



Podemos observar, entonces, que debemos considerar tres casos:

- *Si* $x < -1$ *entonces la ecuación* $|x+1| = |x|$ *resulta:*

$$-x - 1 = -x$$
$$-1 = -x + x$$
$$-1 = 0x$$
$$-1 = 0$$

Y en este caso no tenemos ninguna solución.

- *Si* $-1 \leq x < 0$ *entonces la ecuación* $|x+1| = |x|$ *resulta:*

$$x + 1 = -x$$
$$x + x = -1$$
$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Además, tenemos que $-\frac{1}{2} \in [-1,0)$*, que es el intervalo que estamos considerando, así que tenemos una solución.*

- *Si* $x \geq 0$ *entonces la ecuación* $|x+1| = |x|$ *resulta:*

$$x + 1 = x$$
$$1 = x - x$$
$$1 = 0x$$
$$1 = 0$$

Y, nuevamente, vemos que en este caso no tenemos ninguna solución.

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto solución es $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.