Complementos de Análisis. Año 2023

Práctica 8. Sucesiones y series de funciones

---

1. Para cada una de las sucesiones siguientes, hallar el límite puntual, si existe, sobre los dominios indicados, e indicar si la convergencia es uniforme.

   (a) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x, \quad x \in [0,1]$.

   (b) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < n \\ x - n, & \text{si } x \geq n \end{cases}, \quad$ sobre $[a,\ b]$.

   (c) $f_n(x) := e^{-nx^2}, \quad$ en $[-1,1]$ y en $|x| \geq a$, con $a > 0$.

   (d) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, \quad$ sobre $(0,1)$.

   (e) $g_n(x) = \dfrac{x}{nx+1}, \quad x \in (0,1)$.

2. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas en E que convergen uniformemente a una función f.

   (a) Demostrar que f es acotada en E.

   (b) Demostrar que la sucesión es uniformemente acotada.

3. Probar que
$$f_n(x) := \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}, \quad x \in [0,1],$$
es uniformemente acotada y convergente, pero no contiene ninguna subsucesión uniformemente convergente.

4. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en $E \subset \mathbb{R}^n$, probar:

   (a) $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente en E.

   (b) Si además $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son acotadas, entonces $\{f_n . g_n\}$ converge uniformemente en E.

   (c) Dar un ejemplo de sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ uniformenente convergentes pero tal que $\{f_n . g_n\}$ no lo sea (pero sí que converja puntualmente).

5. Sea $\{f_n\}$ una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas sobre $[a,b]$. Demostrar que $\{f_n\}$ es equicontinua sobre $[a,b]$.

6. Supóngase que $\{f_n\}$ sea una sucesión equicontinua de funciones sobre un conjunto compacto K, y que $\{f_n\}$ converge puntualmente sobre K. Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre K.

7. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$. Probar que f está bien definida en $(0,+\infty)$ y es continua.

8. Mostrar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$.

9. Este ejemplo muestra que la convergencia absoluta de una serie no implica la convergencia uniforme.

Sean $f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \text{si} \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \text{si } x < \dfrac{1}{n+1} \text{ ó } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$

(a) Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función continua f. (Graficar algunas de las funciones f_n en un mismo gráfico para ver la situación).

(b) Demostrar que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$. (Sugerencia: buscar el máximo de cada f_n).

(c) Considerar ahora la serie $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Demostrar que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero no lo hace uniformemente.