Complementos de Análisis. Año 2023

Práctica 7: Series.

---

1. Testear la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2. Supongamos que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$.

   Probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots$ converge.

   (Sugerencia: para $n < 2^k$, comparar $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ con $T_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j}$)

3. Como aplicación del ejercicio anterior, analizar la convergencia o divergencia de las siguientes series para $p > 0$

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)\, n^p}$

4. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y sea $b_0 = a_0$ y si $j > 0$, $b_j = a_j - a_{j-1}$. Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
   Usar lo anterior para demostrar que: si existe k entre 0 y 1 tal que $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq k|a_{n+1} - a_n|$, entonces $\{a_n\}$ converge.

5. Consideremos dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Llamemos $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n$; escribamos $A_{-1} = 0$ y consideremos $0 < p < q$ números naturales.

   (a) Comprobar la siguiente expresión

   $$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

   (Sugerencia: $a_n = A_n - A_{n-1}$)

   (b) Supongamos ahora que

   - las sumas parciales $\{A_n\}$ forman una sucesión acotada
   - b_n es una sucesión decreciente
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Probar que la serie $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.
(Sugerencia: utilizar la expresión anterior para probar que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy)

(c) Comprobar que el criterio de Leibnitz es un caso particular de este resultado.

6. Analizar la convergencia y/o la convergencia absoluta de las series dadas:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} n}{n^2}$

(d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$

(e) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^3} \cdots$

(f) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \cdots$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} n}{n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha}$ para $\alpha > 0$

7. Consideremos un número positivo $b \neq 1$ y la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, donde para todo $n \geq 1$, $a_{2n-1} = b^n$ y $a_{2n} = b^n$.

(a) Calcular $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se puede analizar la convergencia o divergencia utilizando el criterio del cociente?

(b) Calcular $\liminf \sqrt[n]{a_n}$ y $\limsup \sqrt[n]{a_n}$. Analizar ahora la convergencia o divergencia utilizando el criterio de la raíz.

8. Repetir el ejercicio anterior para la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$

9. Consideremos $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Mostrar que $0 < S_n < 3$ y, por lo tanto, converge.

(b) Llamando $\mathrm{e} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}!}$, mostrar que

$$\mathrm{e} - \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}!} < \frac{1}{\mathrm{n!n}}.$$

(Sugerencia: utilizar $(n+k)! \geq (n+1)!(n+1)^{k-1}$)

(c) Notar que si e fuera racional, de la forma $\mathrm{e} = \mathrm{p/q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 < q! \left(\mathrm{e} - \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{q}} \frac{1}{\mathrm{k}!} \right) < \frac{1}{q}.$$

(d) Concluir que e es irracional.

10. Sea $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ el término general de una sucesión con $n \geq 1$.

(a) A partir de la expresón del binomio, comprobar que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

(b) Mostrar que $a_n \leq S_n$, y concluir que $\limsup a_n \leq \mathrm{e}$.

(c) Mostrar que si $m \leq n$, entonces

$$a_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Dejando m fijo, conlcuir que $\liminf a_n \geq S_m$.

(d) Deducir, finalmente que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$.