Guía Teórico-Práctica - Parte 1: Derivación de funciones reales

El objetivo de la presente guía es volver a recorrer conceptos y resultados ya conocidos de Análisis 1, completando los detalles de sus pruebas. También propendremos problemas para poner en práctica estos conceptos.

Comenzaremos esta guía recordando algunas propiedades bien conocidas de los límites de funciones reales. Haremos esto a través de una serie de ejercicios, en los que repasará los conceptos de límite y continuidad para funciones reales.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Recordemos que **el conjunto derivado de** A, A', es el conjunto de todos los puntos límites de A; es decir, los $x \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$, $B^*_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Ejercicio 1. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Mostrar que si para todo $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces $l \leq m$.*

Antes de continuar, repasemos algunos resultados básicos de uso frecuente.

Lema 1. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A' - A$. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces f es acotada en un entorno de la forma $B_\delta(a) \cap A$.*

Prueba. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B^*_\delta(a) \cap A$, $|f(x)| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$. Como $a \notin A$, $B^*_\delta(a) \cap A = B_\delta(a) \cap A$. □

Corolario 1. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A' \cap A$. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces f es acotada en un entorno de a.*

Prueba. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces, para un $\delta > 0$, como el del Lema 1, para todo $x \in B_\delta(a) \cap A$, $|f(x)| < \max\{|l| + 1, |f(a)|\}$; y, por lo tanto, acotada. □

Lema 2. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si f está acotada en un entorno de a y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*

Prueba. Sean $\lambda > 0$ y $C > 0$ tales que para todo $x \in B_\lambda(a) \cap A$, $|f(x)| \leq C$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*_\delta(a) \cap A$, $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{C}$. Tomemos $\eta = \min\{\lambda, \delta\}$. Entonces, para todo $x \in B^*_\eta(a) \cap A$, $|gf(x)| = |g(x)||f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon$.

Como esto vale para cualquier $\varepsilon > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. □

Teorema 1. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$ y supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Entonces,*

a. $\lim_{x\to a} (f + g)(x) = l + m$,

b. $\lim_{x\to a} (k \cdot f)(x) = k \cdot l$, *para* $k \in \mathbb{R}$,

c. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |l|$,

d. $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$ *y* *e.* *si existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in B^*_\delta(a)$, $g(x) \neq 0$ *y* $m \neq 0$, *entonces* $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}$.

Prueba. Veamos *e.*: Supongamos que $m > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B^*_\delta(a)$, $-\frac{m}{2} < g(x) - m < \frac{m}{2}$. Luego, en $B^*_\delta(a)$, $g(x) > \frac{m}{2}$.

En consecuencia, para $x \in B^*_\delta(a)$, tenemos que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{mf(x) - lg(x)}{mg(x)}\right| < \frac{2}{m^2}|mf(x) - lg(x)| = \frac{2}{m^2}|mf(x) - lm + lm - lg(x)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{m}|f(x) - l| + \frac{2|l|}{m^2}|g(x) - m|.$$

Escribamos $M = (\frac{2}{m} + \frac{2|l|}{m^2}) > 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\gamma > 0$ tal que $0 < \gamma < \delta$ y tal que si $x \in B^*_\gamma(a)$, $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{M}$ y $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{M}$. Entonces, tenemos que para $x \in B^*_\gamma(a)$,

$$0 \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{2}{m}|f(x) - l| + \frac{2|l|}{m^2}|g(x) - m| < (\frac{2}{m} + \frac{2|l|}{m^2})\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

En consecuencia, $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}$. □

Ejercicio 2. *Probar los incisos a., b., c. y d. del teorema anterior.*

Ejercicio 3. *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $a \in A'$. *Mostrar que* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *si y sólo si para toda sucesión* $x \in (A - \{a\})^{\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} x(n) = a$, *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} f(x(n)) = l$.

Definición 1. *Sean* $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, *una función, y* $a \in I'$. *Diremos que* f ***es derivable en*** a *si existe* $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. *Al valor de este límite se lo denomina* ***la derivada de*** f ***en*** a *y se lo indica* $f'(a)$.

Si f es derivable en todo punto de I, diremos que f **es derivable en** I. En este caso, podemos definir una función $f' : I \to \mathbb{R}$ por $x \mapsto f'(x)$.

Problema 1. *Sea* $I = \{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} - \{0\}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) := x$. *Determinar los puntos* $x \in I$ *en los cuales* f *admite derivada. Calcular la derivada en dichos puntos.*

Ejercicio 4. *Sean* $I \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $I' = I$, $f : I \to \mathbb{R}$, *una función, y* $a \in I$. *Mostrar que si* f *es derivable en* a, *entonces es continua en* a.

Teorema 2. *Sean* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funciones derivables en* $a \in I'$. *Entonces,*

a. $f + g$ *es derivable en* a *y* $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

b. *si* $k \in \mathbb{R}$, $(k \cdot f)$ *es derivable en* a *y* $(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$,

c. $(f \cdot g)$ *es derivable en* a *y* $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ *y*

d. *si* $g(a) \neq 0$ *y entonces* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* a *y* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

Prueba. Vamos a probar *d.*: Como $g(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in B^*_\delta(a) \cap I$, se tiene que $g(x) \neq 0$ (por qué?). Entonces

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} =$$

$$= \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)}{g(x)g(a)}.$$

□

Ejercicio 5. *Probar los incisos a., b. y c. del Teorema 2.*

Teorema 3. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $f(I) \subseteq J$ y $g : J \to \mathbb{R}$, con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ tales que $I = I'$, $J = J'$. Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Prueba. Sea $u : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}, & \text{si } f(x) \neq f(a) \\ g'(f(a)), & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Como f es continua en a, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Luego, $\lim_{x \to a} u(x) = g'(f(a))$. Además, para $x \neq a$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = u(x)\frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

□

Teorema 4. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente y g su función inversa ($I = I'$). Si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, entonces g es derivable en $b = f(a)$ y*

$$g'(b) = (f'(a))^{-1}.$$

Prueba. Para $y \in J = f(I)$, $x = g(y) \in I$ e $y = f(g(y))$. Luego, para $y \neq b$ (y por lo tanto, $x \neq a$), se tiene que

$$\frac{g(y) - g(b)}{y-b} = \frac{1}{\dfrac{f(g(y)) - f(g(b))}{g(y) - g(b)}} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{f'(a)}.$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B^*_\delta(a)$, $\left| \dfrac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} - \dfrac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon$. Como $x = g(y)$ y $a = g(b)$, la continuidad de g garantiza que existe $\delta' > 0$ tal que si $y \in B^*_{\delta'}(b)$, entonces $x \in B^*_\delta(a)$; de donde se sigue que $\lim_{y \to b} \dfrac{g(y) - g(b)}{y-b} = \dfrac{1}{f'(a)}$. □

Problema 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & si\ x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Analizar los valores de x en los que f es derivable y calcular su derivada

Definición 2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f tiene un* ***máximo local*** *en $c \in [a,b]$, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(c) \cap [a,b]$, $f(x) \leq f(c)$.*

Diremos que f tiene un ***mínimo local*** *en $c \in [a,b]$, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(c) \cap [a,b]$, $f(c) \leq f(x)$.*

Proposición 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que tiene un máximo local en $c \in (a,b)$. Si f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.*

Prueba. Sea $\delta > 0$ tal que $a < c - \delta < c < c + \delta < b$.

Para $c - \delta < x < c$, tenemos que $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ y, por lo tanto, $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

Para $c < x < c + \delta$, tenemos que $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ y, por lo tanto, $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$.

Luego, $f'(c) = 0$. □

Ejercicio 6.
1. *Enuncie y pruebe el resultado análogo a la Proposición 1, para el caso en que c es un mínimo local.*
2. *Analizar los casos $c = a$ y $c = b$.*

Teorema 5 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Ejercicio 7. *Probar el Teorema de Rolle.*

Como consecuencia del Teorema de Rolle, se obtienen los siguientes resultados centrales para el cálculo.

Corolario 2 (Teorema del valor medio)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolario 3 (Teorema generalizado del valor medio)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Ejercicio 8. *Pruebe el Teorema generalizado del valor medio.*
Idea: *considere la función $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.*

Corolario 4 (Teorema de la derivada nula)**.** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b).*

Ejercicio 9. *Pruebe el Teorema de la derivada nula.*

Problema 3. *Sea f una función real derivable tal que f' es contínua en $[a,b]$. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [a,b]$, se cumple que si $y \in B_\delta(x) \cap [a,b]$, entonces $\left| \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$.*

Problema 4 (Regla de L'Hôspital)**.** . *Sean f y g dos funciones derivables en (a,b) tal que $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a,b)$. Mostrar que si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Problema 5. *Estudiar el mismo problema para el extremo derecho del intervalo. Escribir el resultado para un punto interior $c \in (a,b)$.*

Problema 6. *Sea $f:(0,2)\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ la función dada por*

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x^2 < 2 \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Mostrar que para todo $x \in (0,2)\cap\mathbb{Q}$, f es derivable y su derivada es nula. ¿Por qué este resultado no contradice el Teorema de la derivada nula?

Problema 7. *Sean f,g funciones reales derivables en el intervalo (a,b). Mostrar que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a,b)$ si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in (a,b)$, $f(x) = g(x) + C$.*

Problema 8. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que para todo $x,y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2$. Mostrar que f es constante.*

Problema 9. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifica $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$; $f(0) \neq 0$ y f derivable en 0. Mostrar que f es derivable en todo punto y que existe un número real α tal que $f(x) = e^{\alpha x}$ para todo x.*

Corolario 5 (Propiedad de monotonía)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función derivable y tal que $f'(x) \ge 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces, f es creciente.*

Ejercicio 10. *Pruebe la Propiedad de monotonía.*

Teorema 6 (Propiedad de Darboux)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable y $f'(a) \neq f'(b)$. Si k es un real entre $f'(a)$ y $f'(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = k$.*

***Prueba**.* Supongamos que $f'(a) < f'(b)$ (y, por lo tanto, $f'(a) < k < f'(b)$). Definamos $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ por $g(x) := f(x) - kx$. Entonces, $g'(a) = f'(a) - k < 0$ y $g'(b) = f'(b) - k > 0$. Sean $a < x < y < b$ tales que $g(x) < g(a)$ y $g(y) < g(b)$; los cuales existen por la definición de g' como límite. Por el teorema de los valores extremos, existe $c \in (x,y)$ en el cual g alcanza su mínimo absoluto (en el intervalo $[x,y]$), y por lo tanto un mínimo local (en (a,b)). Luego, para este c, $0 = g'(c) = f(c) - k$; y, por lo tanto, $f(c) = k$. □

Definición 3. *Una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se dice **convexa** si para todo $x < y$ en (a,b) y $\lambda \in [0,1]$ se cumple que*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Podemos reescribir la condición de convexidad como: *f es convexa en (a,b) si para todo x,y tales que $a < x < y < b$, se tiene que si $z \in [x,y]$, entonces*

$$f(z) \le \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y).$$

Ejercicio 11. *Ver que la condición anterior equivale a pedir que para todo $z \in (x,y)$,*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Proposición 2. *Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es una función derivable y convexa, entonces f' es una función creciente en (a,b).*

***Prueba**.* Sean $a < x < y < b$. Entonces,

$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

y

$$f'(y) = \lim_{z\to y}\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \ge \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Luego, $f'(x) \le f'(y)$. □

Teorema 7. *Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es una función derivable y f' es creciente en (a,b), entonces f es convexa en (a,b).*

Prueba. Sean $a<x<y<b$ y sea $z\in(x,y)$. Por el Teorema del valor medio, existen $c\in(x,z)$ y $d\in(z,y)$ tales que $f'(c)=\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ y $f'(d)=\dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$. Como $c<d$, $f'(c)\leq f'(d)$; es decir,

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Por el Ejercicio 11, f es convexa. $\square$

Corolario 6. *Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es una función dos veces derivable y $f''(x)\geq 0$, para todo $x\in(a,b)$, entonces, f es convexa.*

Ejercicio 12. *Probar el Corolario 6.*