Complementos de Análisis. Año 2023

Práctica 6. Funciones uniformemente o Lipchitz continuas- Teorema de punto fijo

---

1. (a) Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es uniformemente continua.
   (b) Probar que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es uniformemente continua.

2. (a) Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos, $A \subset X$ y $f : X \to Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, x_n, y_n dos sucesiones en A y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que
   - $d_X(x_n, y_n) \to 0$ para $n \to \infty$
   - $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$

   entonces f no es uniformemente continua en A.
   (b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
   (c) Verificar que la función $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

3. Mostrar que $\forall c > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua en $[c, +\infty)$. Qué ocurre en $(0, +\infty)$?

4. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que f es uniformemente continua si y sólo si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

5. Probar que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es uniformemente continua, entonces si $\{x_n\}$ es de Cauchy en X, $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy en Y.

6. (a) Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado y sea $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que f es acotada.
   (b) Ver que el resultado anterior es falso si E no es acotado.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$ existe una función $g_\epsilon : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua sobre A y $|f(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon \;\; \forall\, x \in A$. Probar que f es uniformemente continua.

8. Sea $X = \mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$, y sea $f : X \to X$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. Hay alguna contradicción en este resultado?

9. Probar que toda función derivable con derivada acotada es Lipchitz continua.

10. Dar un ejemplo de una función Lipchtiz continua que no sea derivable en algún punto.

11. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Probar que f tiene un único punto fijo.
    (b) Mostrar que la función $f(x) = x + (1 + \mathrm{e}^x)^{-1}$ satisface $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero no tiene puntos fijos. Hay alguna contradicción con el resultado obtenido en el inciso anterior?

12. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definamos $K : C[0,1] \to C[0,1]$, definida por

$$K(f)(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)\ \mathrm{d}y.$$

   (a) Mostrar que K está bien definido y es lineal.
   (b) Mostrar que K es continua como aplicación de $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ en $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$.
   (c) Mostrar que si $\|k\|_\infty < 1$ entonces la ecuación (integral)

$$f(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\ \mathrm{d}y$$

   tiene una única solución en $C[0,1]$.

13. Supongamos que f y g son funciones contráctiles sobre un espacio métrico completo (X,d). Mostrar que existen únicos $x_0, y_0 \in X$ tales que $x_0 = g(y_0)$ y $y_0 = f(x_0)$.

14. Probar que $C_0 := \left\{ (a_n)_n,\ a_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty\left((a_n),(b_n)\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

15. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)$. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X,d_X) e (Y,d_Y) son completos.
