Complementos de Análisis - 2023

Práctica 5. Topología en $\mathbb{R}^n$- Espacios métricos

En los cuatro primeros ejercicios, considerar a $\mathbb{R}^2$ con la estructúra euclídea.

1. Mostrar que el primer cuadrante $Q := \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto.

2. Sean A y B dos compactos en $\mathbb{R}$. Mostrar que $A \times B$ es compacto en $\mathbb{R}^2$.

3. Mostrar que todo conjunto arcoconexo X de $\mathbb{R}^2$ es conexo.

4. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. El peine del topólogo, P, es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

   $P = \{(0, y) \,:\, y \in [0, 1]\} \cup \left\{(\frac{1}{n}, y) \,:\, y \in [0, 1]\right\} \cup \{(x, 0) \,:\, x \in [0, 1]\}$.

   El peine reducido, R, se define como:

   $R = \{(0, 1)\} \cup \left\{(\frac{1}{n}, y) \,:\, y \in [0, 1]\right\} \cup \{(x, 0) \,:\, x \in [0, 1]\}$.

   Es decir, el peine reducido consiste en remover el segmento $\{0\} \times (0, 1)$ del peine del topólogo.

   (a) Denostrar que P es un conjunto arcoconexo de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Mostrar que P es conexo.
   (c) Mostrar que R es conexo pero no es arcoconexo.

5. Analizar cuáles de las siguientes funciones determinan una métrica en $\mathbb{R}$:

   (a) $d(x, y) = (x - y)^2$.
   (b) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$.

6. Sean X un conjunto y d_1, d_2 dos métricas sobre él. Decimos que son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $x, y \in X$,

   $$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

   Mostrar que si d_1 y d_2 son equivalentes, entonces inducen la misma topología sobre X. ¿Vale la recíproca?

7. Mostrar que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, las métricas inducidas por las normas

   $$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

   son equivalentes.

   Para $n = 2$ dibujar las tres bolas abiertas $B_1\left((0, 0)\right)$.

8. Consideremos $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

   $$d(x, y) := \begin{cases} \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

   donde $\| \cdot \|_2$ es la norma 2 sobre $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostrar que d es una métrica sobre $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostrar que d no proviene de ninguna norma sobre $\mathbb{R}^2$.

9. Sea X un conjunto finito no vacío. Definamos $\Delta : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ por

$$\Delta(A, B) := |(A - B) \cup (B - A)|,$$

el cardinal de la diferencia simétrica entre A y B. Mostrar que Δ es una métrica en $\mathcal{P}(X)$.

10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$ no vacíos. Definamos δ por

$$\delta(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

(a) Explicar por qué $\delta(A, B)$ está bien definido.

(b) Es δ una métrica sobre las partes no vacías de X?

(c) Sean A y B cerrados tales que $\delta(A, B) \neq 0$. Encontrar un par de abiertos U, V tales que $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

11. Consideremos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ y sea δ definida como en el ejercicio anterior. Consideremos los subconjuntos $A = \{(x, \mathrm{e}^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determinar si $A \cup B$ es conexo.

(b) Calcular $\delta(A, B)$.

(c) Calcular las clausuras de A y B. Tienen algún elemento en común?

Comparar los resultados obtenidos con los del ejercicio anterior. Qué conclusión se obtiene?

Un par de desigualdades clásicas

En los siguientes tres ejercicios, que forman una secuencia, consideraremos p, q reales positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

12. (a) Sean $0 < a, b$ reales. Comprobar que $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ se encuentra en el intervalo de extremos a^p y b^q. (podemos asumir que $a^p < b^q$)

(b) Utilizando que la función real logaritmo natural es cóncava, probar que

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \ln(ab)$$

(c) Concluir que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. (Desigualdad de Young).

(d) ¿Qué sucede si $a = 0$ o $b = 0$?

(e) ¿Qué sucede si $a^p = b^q$?

13. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$. Indiquemos por

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

(a) Utilizando la desigualdad de Young, mostrar que:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{y_j}{\|\mathbf{y}\|_q}\right| \leq 1$$

(b) Concluir que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_q$ (Desigualdad de Hölder)

(c) ¿Qué desigualdad conocida resulta de la de Hölder en el caso en que $p = 2$?

14. Supongamos además que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

(a) Mostrar

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1}|x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1}|y_j|$$

(b) Aplicando la desigualdad de Holder a cada sumando del segundo término, concluir

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

(c) Dividiendo ambos miembros por $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/q}$ y utilizando las relaciones entre p y q, mostrar que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$.

---

15. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Definamos $\delta : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$. dado por:

$$\delta((x, y), (x', y')) := \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$$

(a) Mostrar que δ es una métrica sobre $X \times Y$; y por lo tanto, $(X \times Y, \delta)$ es un espacio métrico.

(b) Es $(X \times Y, \delta)$ el producto en la categoía $\underline{\mathrm{Met_d}}$?

(c) Lo es en $\underline{\mathrm{Met}}$? Explique.