Complementos de Análisis - 2023

Práctica 4. Un poco más de topología - Continuidad

---

1. Sobre el conjunto de Cantor (ejemplo de conjunto perfecto[1] que no contiene ningún segmento).

   Sea $E_0 = [0,1]$. Dividimos este intervalo por tres y separamos el segmento $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Consideremos entonces

   $E_1 = \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$. Dividimos ambos intervalos, cada uno en tres partes y separamos los tercios centrales. Consideremos entonces

   $E_2 = \left[0, \dfrac{1}{9}\right] \cup \left[\dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{9}\right] \cup \left[\dfrac{6}{9}, \dfrac{7}{9}\right] \cup \left[\dfrac{8}{9}, 1\right]$

   Iterando el procedimiento, obtenemos una sucesión de conjuntos E_n. El conjunto

   $$\mathsf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

   se llama conjunto de Cantor.

   Demostrar que

   (a) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...$
   (b) E_n es la unión de 2^n intervalos, cada uno de longitud 3^{-n}
   (c) C es no vacío y compacto.
   (d) C no contiene ningún segmento.
   Sugerencia: utilizar el hecho de que C no contiene a los intervalos $I_{k,m}$ de la forma $I_{k,m} = \left(\dfrac{3k+1}{3^m}, \dfrac{3k+2}{3^m}\right)$, donde k y m son enteros positivos y comprobar que, dado cualquier segmento (a,b), es posible hallar un intervalo $I_{k,m}$ contenido en él.
   (e) C es perfecto (es decir, todo elemento de C es de acumulación)

2. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ acotada tal que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe. Demostrar que hay dos sucesiones $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ en $(0,1)$ convergentes a 0 tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ existen pero no coinciden.

3. Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, con $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Definimos el gráfico de f como

   $$\operatorname{graf}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in K\} \subset \mathbb{R}^2.$$

   Probar que f es continua sii $\operatorname{graf}(f)$ es compacto.

4. Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n}, \text{ si } x = \frac{m}{n}, \ (m,n) = 1 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases},$$

   es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.

[1] un conjunto perfecto es aquel que no tiene puntos aislados

5. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función continua entre espacios topológicos. Probar que si $A \subset X$ es conexo, entonces $f(A) \subset Y$ es conexo.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}$, A no compacto. Dar ejemplos de:

   (a) $f : A \to \mathbb{R}$ continua y no acotada.

   (b) $f : A \to \mathbb{R}$ continua y acotada, pero que no alcanza su máximo.