Complementos de Análisis - 2023

Práctica 3. Topología de $\mathbb{R}$

---

1. Sea A abierto y B cerrado. Demostrar que $B \setminus A$ es cerrado y $A \setminus B$ es abierto.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Mostrar que son equivalentes:

   (a) A es cerrado.

   (b) Para todo intervalo $[a, b]$, si $A \cap [a, b] \neq \emptyset$, entonces $\sup(A \cap [a, b])$ e $\inf(A \cap [a, b])$ pertenecen a A.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Demostrar que $\sup A = \max \partial(A)$.

4. Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado no vacío y $b \in \mathbb{R}$. Mostrar que existe $a \in C$ tal que $|a - b| = \inf\{|x - b|, x \in C\}$. Este elemento a es único?

5. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$.

   (a) Mostrar que si A es compacto y B cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.

   (b) Dar un ejemplo de un par A, B de cerrados tales que $A + B$ no sea cerrado.

   (c) Mostrar que si A es abierto, $A + B$ es abierto.

6. Sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia indexada de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Mostrar que:

   (a) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

   (b) $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$. Qué ocurre con la otra inclusión?

7. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto infinito tal que todos sus puntos son aislados. Demostrar que X no es compacto.

8. Sea $K \subset \mathbb{R}$ el conjunto formado por 0 y los números $1/n$, para $n = 1, 2 \ldots$. Probar que K es compacto directamente de la definición.

9. Dar un ejemplo de un cubrimiento del intervalo $(0, 1)$ que no admita subcubrimiento finito.

10. (a) Demostrar que la clausura de un conjunto conexo es conexa.

    (b) Es verdadero o falso? Si $A, C \subset \mathbb{R}$ son conexos y $A \subset B \subset C$ entonces B es conexo.

    (c) Demostrar que si A es conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.

11. Demostrar que el conjunto de los racionales no es conexo.

12. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con su orden usual. Sea $B = \{[a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todos los intervalos reales cerrados en a y abiertos en b. Sea $\mathcal{T}$ la menor topología sobre $\mathbb{R}$ que contiene a B. El espacio topológico $\mathbb{S} = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ se denomina *la recta de Sorgenfrey*.

(a) Mostrar que todo abierto de la topología natural de $\mathbb{R}$ lo es de la topología de Sorgenfrey. ¿Vale la otra inclusión?

(b) Mostrar que los elementos de B son clopens[1] de $\mathbb{S}$.

(c) Mostrar que los puntos son cerrados en $\mathbb{S}$.

(d) Mostrar que ningún subconjunto con más de un elemento es conexo en $\mathbb{S}$.

[1]se llama clopen a un conjunto que es aboierto y cerrado simultáneamente