Complementos de Análisis. Año 2023

Práctica 2: Sucesiones

---

1. Demostrar las siguientes propiedades:
   (a) Si $|a| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
   (b) Si $a > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
   (c) Si $a < -1$, entonces no existe $\lim_{n\to\infty} a^n$.
   (d) Si $b < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} n^b = 0$.
   (e) Si $b > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} n^b = +\infty$.
   (f) Si $a \le 1$ y $b > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^b} = 0$.
   (g) Si $a > 1$ y $b > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^b} = +\infty$.
2. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números positivos. Mostrar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{L}$.
3. Para cada una de las siguientes sucesiones $\{x_n\}_n$ en $\mathbb{R}$, demostrar que son convergentes y hallar el número real al que convergen.
   (a) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$
   (b) $x_1 = \sqrt{2}$; $\quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ para $n \ge 1$. (sugerencia: mostrar que $\forall n \ge 1,\ x_n < 2$)
   (c) $x_1 = 8$; $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 2$ para $n \ge 1$.
4. De las siguientes sucesiones, algunas son subsucesiones de otras; determinarlo. Hallar los límites subsecuenciales y determinar cuáles sucesiones convergen.
   (a) 1, -1, 1, -1,...
   (b) 1, 1, -1, 1, 1, -1, ...
   (c) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...
   (d) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$, ...
   (e) 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{4}$, 0, ...
5. Hallar los límites subsecuenciales de las sucesiones dadas; puede concluir algo sobre la convergencia de cada sucesión?
   (a) $x_n = 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$
   (b) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$
   (c) $x_n = \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2}) + \cos n\pi$
6. Dar sucesiones cuyos límites subsecuenciales sean:

(a) $\{1,2\}$

(b) $\{1,2,3\}$

(c) Z

7. (a) Sean las sucesiones $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ tales que $y_n \to \infty$ y $x_n y_n \to 1$. Mostrar que $x_n \to 0$.

   (b) Usar lo anterior para hallar $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

8. Demostrar que para toda sucesión $\{x_n\}_n$ de números reales creciente y no acotada superiormente, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

9. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de modo que las subsucesiones $\{x_{2n}\}_n$, $\{x_{2n+1}\}_n$ y $\{x_{3n}\}_n$ convergen. Mostrar que $\{x_n\}_n$ converge.

10. (a) Supongamos que $\{a_n\}_n$ es una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\sigma_n := \frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$.

    i. Mostrar que $\underline{\lim}\ a_n \leq \underline{\lim}\ \sigma_n \leq \overline{\lim}\ \sigma_n \leq \overline{\lim}\ a_n$.

    ii. Si $\{a_n\}_n$ es convergente, mostrar que $\{\sigma_n\}_n$ converge al mismo límite.

    iii. Buscar un ejemplo donde $\{a_n\}_n$ sea divergente pero $\{\sigma_n\}_n$ sea convergente.

11. Hallar $\overline{\lim}\ a_n$ y $\underline{\lim}\ a_n$, y determinar si alguna de las sucesiones convergen.

    (a) 1,2,3,4,1,2,3,8,1,2,3,1,2,3,1,2,3,...

    (b) $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$

    (c) $\frac{1}{n}\cos n\pi$

    (d) $(1+\frac{1}{n})\cos n\pi$

12. Demostrar que si $a_n \leq b_n \quad \forall n$, entonces

    (a) $\underline{\lim}\ a_n \leq \underline{\lim}\ b_n$

    (b) $\overline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim}\ b_n$

13. Sea $m \leq a_n \leq M$, $\forall n \geq n_0$. Probar que: $\quad m \leq \underline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n \leq M$

14. Consideremos la sucesión real $\{a_n\}_n$, cuyos primeros términos están dados por:

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{0}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\ \frac{0}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{3}\cdots$$

y que se continúa con todas las fracciones de denominador, 4, 5, etc., con numeradores que están ordenados de menor a mayor entre 0 y el denominador.

    (a) Mostrar que la sucesión $\{a_n\}_n$ es acotada.

    (b) Determinar todos los límites posibles de subsucesiones convergentes de $\{a_n\}_n$.

Límite superior e inferior

Sea $a = \{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales acotada.
Para cada $n \geq 1$ consideremos el conjunto $\mathcal{A}_n = \{a_m : m \geq n\}$. Como es un conjunto no vacío y acotado superiormente, tiene supremo, al que llamaremos $A_n = \sup \mathcal{A}_n$.
Como $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$ para todo $n \geq 1$, entonces $\sup \mathcal{A}_{n+1} \leq \sup \mathcal{A}_n$.

Es decir, la sucesión $\{A_n\}_n$ es decreciente. Como además está acotada inferiormente, $\{A_n\}_n$ converge.

Definición: El límite de la sucesión $\{A_n\}_n$ se llama límite superior de la sucesión, y lo escribimos

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Al ser una sucesión decreciente, el límite coincide con el ínfimo. Luego, otra definición equivalente para el límite superior es

$$\overline{\lim}\, a_n = \inf A_n = \inf\left(\sup \mathcal{A}_n\right).$$

Similarmente, como cada conjunto $\{A_n\}_n$ también está acotado inferiormente, tiene ínfimo, al que llamaremos $B_n = \inf \mathcal{A}_n$.
Como $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$ para todo $n \geq 1$, entonces $\inf \mathcal{A}_{n+1} = B_{n+1} \geq \inf \mathcal{A}_n = B_n$.

Es decir, la sucesión $\{B_n\}_n$ es creciente. Como además está acotada superiormente, $\{B_n\}_n$ converge.

Definición: El límite de la sucesión $\{B_n\}_n$ se llama límite inferior de la sucesión, y lo escribimos

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} B_n$$

Al ser una sucesión creciente, el límite coincide con el supremo. Luego, otra definición equivalente para el límite inferior es

$$\underline{\lim}\, a_n = \sup B_n = \sup\left(\inf \mathcal{A}_n\right).$$

Definición alternativa

Dada la sucesión acotada $\{a_n\}_n$, consideremos el conjunto $\mathcal{L}$ de todos sus límites subsecuenciales. Como este conjunto está acotado inferior y superiormente, posee ínfimo y supremo, respectivamente.

Teorema: $\underline{\lim}\, a_n = \inf \mathcal{L} \qquad \overline{\lim}\, a_n = \sup \mathcal{L}$.

Es más, existe una subsucesión que converge a $\underline{\lim}\, a_n$ y otra subsucesión que converge a $\overline{\lim}\, a_n$, es decir que

$$\overline{\lim}\, a_n = \max \mathcal{L}; \qquad \underline{\lim}\, a_n = \min \mathcal{L}$$