Complementos de análisis real

Esteban Baragatti

Eduardo Ghiglioni

Pedro Massey

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Índice

1 Introducción **3**

2 El sistema de números reales **4**
2.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ . . . 4
2.2 Conjuntos ordenados . . . 9
2.3 Cuerpos . . . 11
2.4 La recta real extendida . . . 18
2.5 Complejos . . . 19
2.6 Conjuntos numerables . . . 20
2.7 Ejercicios del texto . . . 23
2.8 Ejercicios nuevos . . . 26

3 Espacios métricos **31**
3.1 Definiciones y propiedades básicas . . . 31
3.2 Conjuntos compactos en espacios métricos . . . 41
3.3 Conjuntos conexos . . . 49
3.4 Ejercicios del texto . . . 50
3.5 Ejercicios nuevos . . . 53

4 Sucesiones y series **57**
4.1 Convergencia de sucesiones en espacios métricos . . . 57
4.2 Subsucesiones . . . 62
4.3 Sucesiones de Cauchy . . . 64
4.4 Sucesiones en $\mathbb{R}$ . . . 67
4.5 Series . . . 72
4.6 Series de potencia . . . 85
4.7 Ejercicios del texto . . . 85
4.8 Ejercicios nuevos . . . 89

5 Continuidad en espacios métricos **94**
5.1 Límites de funciones entre espacios métricos . . . 94
5.2 Funciones continuas . . . 96
5.3 Continuidad, compacidad y conexión . . . 100
5.4 Límites laterales en $\mathbb{R}$ . . . 102
5.5 Ejercicios del texto . . . 104
5.6 Ejercicios nuevos . . . 106

1 Introducción

El siguiente apunte es un extracto del curso 2021 de complementos de análisis el cual abarca los temas comprendidos por el plan de estudios de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de La Plata - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemática. Dicho programa se detalla a continuación:

1. SISTEMA DE NÚMEROS REALES: El sistema de números reales como cuerpo ordenado y completo. Cortaduras de Dedekind. Sistema ampliado de números reales. Los espacios euclídeos.

2. TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$: Conjuntos abiertos y cerrados. Interior, clausura, frontera y puntos de acumulación. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel.

3. SUCESIONES NUMÉRICAS Y SERIES: Sucesiones convergentes. Subsucesiones. Sucesiones de Cauchy. Límites subsecuenciales. Límites superior e inferior. Series. Convergencia absoluta y condicional de las series. Criterios básicos de convergencia para series de términos no negativos. Series de potencias. Reordenaciones.

4. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES: Límite y continuidad. Continuidad y compacidad. Diferencial de una función real. Teoremas de la función inversa e implícita.

5. LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES: Definición y existencia de la integral. Integración y diferenciación.

6. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES: Convergencia uniforme. Convergencia uniforme y continuidad. Convergencia uniforme e integración. Convergencia uniforme y diferenciación. Familias equicontinuas de funciones.

7. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: Existencia y unicidad de EDO's. Ecuaciones lineales. Ecuación diferencial ordinaria de orden n.

Este material está destinado a alumnos que ya obtuvieron conocimientos básicos de análisis matemático y buscan formalizar el lenguaje. Por ello, algunos de los resultados pueden resultar conocidos para el lector, pero son rigurosamente demostrados en este apunte.

Varios capítulos y ejercicios de este apunte están basados en el libro de Rudin, W. (1980), Principios de análisis matemático (3.ª ed.), McGraw-Hill. A lo largo de todo el texto vamos a dejar varios detalles para el lector y en esos casos escribimos □. Una vez que el lector complete estos detalles (es muy recomendable hacer esto, porque colabora con la compresión detallada del contenido del texto), el lector puede pintar el cuadradito de forma que quede el famoso símbolo ■ de detalle resuelto o prueba concluida. Cada capítulo termina con una primera sección de *Ejercicios del texto* que recopila todas las tareas □. Luego sigue una segunda sección de *Ejercicios nuevos* para practicar; en esta sección aparecerán algunos ejercicios marcados con $(*)$ los cuales pueden tomarse como optativos o ampliatorios porque requieren un poco más de desarrollo pero que sirven para profundizar aspectos teóricos o temáticas complementarias del capítulo.

2 El sistema de números reales

En esta sección formalizamos la base sobre la cual se desarrolla el resto del curso: los números reales. En los procesos de formalización es usual asumir una serie de afirmaciones básicas (axiomas) y construir la teoría desde estas afirmaciones básicas. En nuestro caso, nuestras afirmaciones básicas tienen que ver con los números naturales $\mathbb{N}$. Una vez que asumimos estas afirmaciones sobre $\mathbb{N}$, el resto de los números ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) surgen de construcciones explícitas que realizaremos con cierto detalle. De forma similar, las propiedades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ que vamos a considerar estarán justificadas (probadas) a partir de las propiedades que hemos asumido de $\mathbb{N}$.

2.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Comenzamos asumiendo que contamos con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en el que está definida una operación binaria que denotamos $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que tiene las siguientes propiedades: para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$:

S1. Asociatividad: $n + (m + p) = (n + m) + p$.

S2. Conmutatividad: $n + m = m + n$.

S3. Existencia de neutro: $0 + n = n$.

S4. Cancelación: $n + m = n + p \implies m = p$.

En este caso decimos que $\mathbb{N}$ es un monoide abeliano cancelativo. La asociatividad nos permite escribir expresiones del tipo $m_1 + \ldots + m_n$ sin ambigüedad (notar que debemos elegir alguna forma para asociar los términos para poder sumar: pero la suma no depende de cómo asociamos).

Además, $\mathbb{N}$ posee una relación de orden " $\leq$ " compatible con la estructura anterior:

O1. $n \leq m$ si y solo si existe p tal que $n + p = m$.

O2. Si $n \leq m$ entonces $n + p \leq m + p$.

O3. Dados n, $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $n \leq m$ o $m \leq n$.

O4. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es no vacío entonces A tiene un primer elemento.

Acorde con lo que aceptamos válido para $\mathbb{N}$, el *Principio de buena ordenación* O4 es equivalente ($\square$) al *Principio de inducción*:

O4'. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ cumple que $0 \in A$ y $(\forall\, n \in \mathbb{N})(n \in A \to n + 1 \in A)$ entonces $A = \mathbb{N}$.

Definición 2.1. Una relación de orden es una relación binaria que permite comparar los elementos de un conjunto. Esta relación cumple las siguientes propiedades: reflexividad, antisimetría y transitividad.

a) Reflexividad: Todo elemento está relacionado consigo mismo.

b) Antisimetría: Si x está relacionado con y, e y está relacionado con x, entonces x e y son el mismo elemento.

c) Transitividad: Si x está relacionado con y, e y está relacionado con z, entonces x está relacionado con z.

Además de las propiedades anteriores, si se cumple que para cualquier par de elementos x e y, x está relacionado con y o y está relacionado con x, decimos que el orden es total. En caso contrario decimos que el orden es parcial. △

Hasta aquí hemos considerado las propiedades de $\mathbb{N}$ que vamos a asumir como ciertas. En adelante, vamos a construir y justificar con cierto detalle todo lo que hagamos.

Observar que podemos definir otra operación binaria que denotamos por $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$0 \cdot n = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \qquad n \cdot m = \underbrace{m + \ldots + m}_{\text{suma de } n \text{ términos}} \in \mathbb{N} \text{ para } n \geq 1\,.$$

Lo anterior define el producto que verifica las siguientes propiedades (demostrar estas propiedades es un gran □): para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$

P1. Asociatividad: $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.

P2. Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$.

P3. Existencia de neutro: $1 \cdot n = n$.

P4. si $n \cdot m = 0$ entonces $n = 0$ o $m = 0$.

P5. Si $m \leq p$ entonces $n \cdot m \leq n \cdot p$.

D. Distributividad: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$.

La propiedad P4. implica la simplificación: si $n \neq 0$ y $n \cdot m = n \cdot p$ entonces $m = p$.

A partir de $\mathbb{N}$ nuestro objetivo ahora es *construir* $\mathbb{Z}$.

Nota histórica. Los enteros negativos (y el 0) surgieron después que los naturales. En cierto sentido, parecían absurdos porque eran "nuevos números" que representaban "algo menor que nada". Hoy esa visión parece anticuada: la escuela nos "ajusta" temprano a los enteros negativos y nos da usos prácticos. Es natural responder "¿Cuánto cambió la temperatura de 10 p.m. a 11 p.m.?" con "-1°C". Similarmente, las velocidades 15 m/s y -15 m/s tienen significados físicos distintos. Otro ejemplo natural surge a partir del desarrollo del álgebra: en $\mathbb{N}$, resolvemos la ecuación $x + 7 = 8$ pero no $x + 8 = 7$. En este sentido, se consideró más satisfactorio inventar "nuevos números" para que todas las ecuaciones $x + m = n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ tuvieran solución, en lugar de decir que algunas no la tienen.

Motivación. El párrafo anterior contiene la semilla de una idea. Por ejemplo, queremos un número "$7 - 8$". Partiendo de $\mathbb{N}$, podríamos decir que el par ordenado $(7, 8)$ es un entero (a llamar -1): es la "respuesta" a $7 - 8$. Similarmente, $(8, 7)$ sería el entero 1 (respuesta a $8 - 7$). Es decir, "Un entero es un par ordenado de números naturales". Esto parece prometedor, pero es demasiado simple: este enfoque daría "demasiados" enteros. Siguiendo esta lógica, los pares $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4), \ldots$ representarían las "respuestas" a $1 - 2$, $2 - 3$, $3 - 4, \ldots$; es decir, ¡todos estos pares deberían considerarse el mismo entero! En general, si $m - n = p - q$ (en $\mathbb{Z}$ informal), queremos que (m, n) y (p, q) representen el mismo entero. Podemos expresar esto sin mencionar resta: queremos que (m, n) y (p, q) representen el mismo entero si $m + q = n + p$. En este caso los tratamos como "iguales" mediante una relación de equivalencia que los agrupa en la misma clase.

Definición 2.2. Consideramos

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : \ n, m \in \mathbb{N}\}.$$

En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = p + n \in \mathbb{N}\,.$$

(notemos que la *suma* en la definición anterior es la suma en $\mathbb{N}$, que es la *única* operación de suma que tenemos definida). △

Es sencillo verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia (acá se usa la propiedad de cancelación, □).

Definición 2.3. Consideramos entonces el conjunto cociente

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim = \{[(m, n)] \ : \ m,\, n \in \mathbb{N}\}\,,$$

donde $[(m, n)]$ denota la clase de equivalencia de (m, n) según $\sim$. △

Ejemplo 2.4. ¿Cómo son las clases de equivalencia de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$? Por ejemplo:

$$[(0, 5)] = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), \ldots, (n, n + 5), \ldots\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

△

El siguiente teorema contiene una de las claves de estas clases de equivalencias, pues siempre podemos pensar en las clases de equivalencias de $[(0, k)]$ o $[(k, 0)]$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5. *Toda clase de equivalencia $[(m, n)]$ contiene un par ordenado con al menos una coordenada 0. Por lo tanto, toda clase puede escribirse como $[(0, k)]$ o $[(k, 0)]$ para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Si $m \leq n$ en $\mathbb{N}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m + k = n = 0 + n$ (Por O1.). Esto implica que $(m, n) \sim (0, k)$, luego $[(m, n)] = [(0, k)]$.

Si $n < m$ en $\mathbb{N}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k + n = n + k = m = 0 + m = m + 0$ (Por O1. y S2.). Entonces $(m, n) \sim (k, 0)$, luego $[(m, n)] = [(k, 0)]$. ■

Obs 2.6. Según el teorema anterior, podemos listar todas las clases de equivalencia como:

$$\ldots, \quad [(0, 3)], \quad [(0, 2)], \quad [(0, 1)], \quad [(0, 0)], \quad [(1, 0)], \quad [(2, 0)], \quad [(3, 0)], \quad \ldots$$

△

El siguiente paso es definir en $\mathbb{Z}$ la suma y multiplicación. Para la suma tenemos la siguiente definición.

Definición 2.7. Podemos definir una operación binaria $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$[(m, n)] + [(p, q)] = [(m + p, n + q)] \in \mathbb{Z}\,.$$

△

Notemos que la operación en $\mathbb{Z}$ queda bien definida en función de la suma en $\mathbb{N}$ (□ Sugerencia: recordemos que hemos aceptado la existencia de $\mathbb{N}$ con todas sus propiedades). En este caso, se verifica que la suma en $\mathbb{Z}$ verifica la propiedad asociativa S1 (□), donde el neutro $0_{\mathbb{Z}} = [(0, 0)] = [(n, n)]$, para $n \in \mathbb{N}$. Además, si $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ existe el opuesto $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$ tal que

$$[(m, n)] + [(n, m)] = [(m + n, m + n)] = [(0, 0)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

En este caso escribimos $[(n, m)] = -[(m, n)]$, que determina una operación 1-aria en $\mathbb{Z}$. Así, vale

S5 Si $x \in \mathbb{Z}$ existe $-x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (-x) = 0$.

La existencia del elemento opuesto y las propiedades anteriores hacen de $\mathbb{Z}$ un grupo abeliano conmutativo (en donde vale, en particular, la cancelación. Verificar que valen todas las propiedades $\square$).

Además, si $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ está dada por $\rho(n) = [(n, 0)] := n_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ entonces ρ verifica:

$$\rho(x) = [(0, 0)] := 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad \rho(m + n) = \rho(m) + \rho(n)\,.$$

En este caso ρ es una función inyectiva que permite identificar n con $\rho(n) \in \mathbb{Z}$. De esta forma, en adelante, consideramos $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ vía la identificación dada por ρ.

Más aún, notemos que $-\rho(n) = -[(n, 0)] = [(0, n)]$ de forma que todo elemento en $\mathbb{Z}$ se puede escribir

$$[(m, n)] = [(m, 0)] + [(0, n)] = \rho(m) + (-\rho(n)) = \rho(m) - \rho(n)\,.$$

En general, para cada $n \in \mathbb{N}$, el entero $[(0, n)]$ se denotará $-n_{\mathbb{Z}}$ y el entero $[(n, 0)]$ se denotará $n_{\mathbb{Z}}$. De esta forma quedan definidos los números enteros $\mathbb{Z}$.

Para definir la multiplicación en $\mathbb{Z}$ pensemos lo siguiente.

Motivación. Recordar que pensamos a la clase $[(m, n)]$ como resultado de $m - n$. En ese sistema:

$$(m - n) \cdot (p - q) = (m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q).$$

Así, el producto debe ser el entero que "corresponde" a $(m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q)$.

Definición 2.8. Podemos definir un producto en $\mathbb{Z}$ dado por

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] = [(mp + nq, mq + np)].$$

$\triangle$

Definido de esta manera, el producto verifica las propiedades P1.-P3. en $\mathbb{Z}$ $\square$. Además, vale que

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] = 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow [(m, n)] = 0_{\mathbb{Z}} \quad \text{ó} \quad [(p, q)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

La propiedad anterior garantiza la simplificación: si $[(m, n)] \neq 0_{\mathbb{Z}}$ entonces:

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] = [(m, n)] \cdot [(r, s)] \implies [(p, q)] = [(r, s)]\,.$$

Por otro lado, también se verifica la propiedad D (distributiva) en $\mathbb{Z}$ ($\square$).

Finalmente, definimos el orden en $\mathbb{Z}$ dado por: si a, $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a \leq b$ si $b - a \in \mathbb{N}(\subseteq \mathbb{Z})$. En este caso se verifican las propiedades O2 y O3 en $\mathbb{Z}$. Además, se verifica P5 siempre que $n \in \mathbb{N}$ (todo lo anterior es un súper $\square$). Además, ρ respeta las operaciones suma, producto, el neutro de la suma y del producto; ρ también respeta el orden en $\mathbb{N}$. De esta forma, $\mathbb{N}$ se identifica completamente con $\rho(\mathbb{N})$, lo cual hace más claro que la inclusión $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ está bien propuesta.

Obs 2.9. Notemos que esta versión que hemos construido de $\mathbb{Z}$ describe a $\mathbb{Z}$ como un espacio cociente. Esto contrasta un poco con la idea que uno tiene de $\mathbb{Z}$ como *números*. Sin embargo, una vez establecidas las propiedades usuales de $\mathbb{Z}$ en esta construcción particular, podemos pensar a $\mathbb{Z}$ nuevamente como números: es decir, lo importante no es la naturaleza de los elementos de $\mathbb{Z}$ (por ejemplo) sino las relaciones entre estos elementos (la existencia de las operaciones que satisfacen las propiedades que estamos acostumbrados a usar de $\mathbb{Z}$). $\triangle$

Y ya que estamos, seguimos *construyendo* $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$.

Motivación. La idea aquí es definir una relación de equivalencia $\approx$ en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ (el conjunto de pares ordenados de enteros cuya segunda componente es distinta de cero) para la cual si $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ y $n\in\mathbb{Z}$ entonces $(p,q)\approx(np,nq)$. Recordemos nuestra comprensión intuitiva de las fracciones para ver cómo podríamos definir esta relación de equivalencia. Si dos fracciones son iguales, podemos "multiplicar en cruz" para obtener una expresión puramente en términos de enteros. Es decir, si $\dfrac{p}{q}=\dfrac{r}{s}$ entonces $p\cdot s=r\cdot q$. Usaremos esto para definir la siguiente relación.

Definición 2.10. Definimos $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y consideramos una relación en

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*=\{(p,q):\ p\in\mathbb{Z}\,,\ q\in\mathbb{Z}^*\}$$

dada por

$$(p,q)\approx(r,s)\Leftrightarrow p\cdot s=r\cdot q\,.$$

(notemos que el producto en la definición anterior es el producto en $\mathbb{Z}$, que hemos construido previamente). △

Una vez verificado el hecho de que $\approx$ es una relación de equivalencia (□), podemos considerar el conjunto cociente

$$\mathbb{Q}:=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\approx=\{\overline{(p,q)}\ :\ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\}\,.$$

donde $\overline{(p,q)}$ denota la clase de equivalencia de (p,q) con respecto a la relación $\approx$.

Ejemplo 2.11. Los siguientes son todos elementos de $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}\overline{(1,2)}&=\{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\},\\ \overline{(-3,4)}&=\{(-3,4),(3,-4),(-30,40),\ldots\},\\ \overline{(5,1)}&=\{(5,1),(15,3),(45,9),\ldots\},\\ \overline{(0,1)}&=\{(0,1),(0,2),(0,-4),\ldots\}.\end{aligned}$$

△

En este caso, podemos definir las operaciones binarias

$$\overline{(p,q)}+\overline{(r,s)}=\overline{(s\cdot p+q\cdot r,q\cdot s)}\quad\text{ y }\quad\overline{(p,q)}\cdot\overline{(r,s)}=\overline{(p\cdot r,q\cdot s)}\,.$$

coincidentes con la suma y la multiplicación de fracciones. En este contexto, la suma en $\mathbb{Q}$ queda bien definida y verifica S1.-S3. (aquí el neutro de la suma es $0_\mathbb{Q}=\overline{(0,1)}$) y el producto verifica las propiedades P1.-P4 (y el neutro del producto es $1_\mathbb{Q}=\overline{(1,1)}$). Además, si $\overline{(p,q)}\in\mathbb{Q}$ entonces $\overline{(-p,q)}\in\mathbb{Q}$ es tal que $\overline{(p,q)}+\overline{(-p,q)}=0_\mathbb{Q}$ y escribimos $\overline{(-p,q)}=-\overline{(p,q)}$. De esta forma todo elemento de $\mathbb{Q}$ tiene opuesto aditivo y la suma en $\mathbb{Q}$ corresponde a una operación de grupo abeliano. Por otro lado, si $\overline{(p,q)}\neq 0_Q$ (es decir, $p\neq 0$) entonces $\overline{(q,p)}\in\mathbb{Q}$ es tal que $\overline{(p,q)}\cdot\overline{(q,p)}=1_\mathbb{Q}$ y en este caso escribimos $\overline{(q,p)}=\overline{(p,q)}^{-1}$. Así, vale

P4'. Existencia de inverso: si $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$, entonces existe $x^{-1}\in\mathbb{Q}$ tal que $x\cdot x^{-1}=1_\mathbb{Q}$.

Es decir, todo elemento no nulo admite un inverso multiplicativo. De esta forma, $\mathbb{Q}$ verifica S1.-S4. y P1.-P3, P4' y D. En este caso, decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo (un gigantesco □). Más adelante vamos a re-escribir la definición de cuerpo.

Además, podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$ de la siguiente forma. Sea $P = \{\overline{(p,q)} \ : \ p, q \in \mathbb{N}, p \neq 0, q \neq 0\}$; en este caso definimos

$$\overline{(p,q)} \leq \overline{(r,s)} \Leftrightarrow \quad \overline{(p,q)} = \overline{(r,s)} \quad \text{ó} \quad \overline{(p,q)} \neq \overline{(r,s)} \quad \text{y} \quad \overline{(r,s)} - \overline{(p,q)} \in P\,.$$

En este caso, se verifica que la relación anterior es un orden que resulta compatible con la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$: si $x \leq z$ en $\mathbb{Q}$ entonces $x + w \leq z + w$ para todo $w \in \mathbb{Q}$; por otro lado, si $w \in P$ entonces $x \cdot w \leq z \cdot w$. También se verifica la tricotomía: si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $x > 0$ o $x = 0$ o $x < 0$. En este caso decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

Finalmente, si consideramos $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\gamma(p) = \overline{(p,1)} \in \mathbb{Q}$ entonces γ es una función inyectiva que respeta toda la estructura de $\mathbb{Z}$ que hemos considerado: la suma, el producto y el orden ($\square$). En este sentido es que podemos identificar $p \in \mathbb{Z}$ con $\gamma(p) \in \mathbb{Q}$ y considerar $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, cosa que haremos de aquí en adelante.

En este punto podemos hacer una observación similar a la Obs. 2.9. Por otro lado, cabe mencionar que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo dotado de un orden que tiene algunas deficiencias para poder hacer análisis. Por ejemplo, aplicando el teorema fundamental de la aritmética se verifica que no existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$. En este sentido, la función $f(x) = (x^2 - 2)^2$ definida en los $x \in C := \{t \in \mathbb{Q} : 0 \leq t \leq 2\}$ ¡no tiene un mínimo! En lo que sigue vamos a *completar* $\mathbb{Q}$, esencialmente *construyendo* los puntos que le faltan para llegar a ser $\mathbb{R}$. Este proceso de completación puede ser pensado desde muchos puntos de vista distintos. Nosotros vamos a considerar el punto de vista que corresponde a la propiedad de existencia de supremos de conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Para formalizar esto, consideramos los siguientes conceptos.

2.2 Conjuntos ordenados

Recordemos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ es un conjunto A en donde hay definida una relación de orden (que es reflexiva, antisimétrica y transitiva). En este caso notamos $a < b$ siempre que $a \leq b$ y $a \neq b$.

Definición 2.12. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $E \subseteq A$.

1. Decimos que E está acotado superiormente si existe $x \in A$ tal que $x \geq e$ para todo $e \in E$; en este caso, decimos que x es una cota superior de E. Definimos el conjunto de cotas superiores

$$CS(E) = \{x \in A \ : \ x \ \text{ es cota superior de } \ E\} \subseteq A\,.$$

   De forma análoga, decimos que E está acotado inferiormente si existe $x \in A$ tal que $x \leq e$ para todo $e \in E$; y en este caso decimos que x es cota inferior de E. Definimos

$$CI(E) = \{x \in A \ : \ x \ \text{ es cota inferior de } \ E\} \subseteq A.$$

   Obs 2.13. Observar que estos conjuntos pueden ser vacíos. Por ejemplo, si tomamos $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ donde $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $2\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente ni inferiormente. Pero cuando asumimos que el conjunto está acotado superiormente estamos asumiendo que $CS(E) \neq \emptyset$. Análogamente si el conjunto está acotado inferiormente estamos asumiendo que $CI(E) \neq \emptyset$. $\triangle$

2. Si E está acotado superiormente ($CS(E) \neq \emptyset$) decimos que $\alpha \in A$ es el supremo de E, y notamos $\alpha = \sup E$, si

   (a) $\alpha \in CS(E)$;

(b) Si $\beta \in CS(E)$ entonces $\alpha \leq \beta$

Es decir, α es la mínima cota superior de E.

3. Si E está acotado inferiormente ($CI(E) \neq \emptyset$) decimos que $\gamma \in A$ es el ínfimo de E, y notamos $\gamma = \inf E$, si

(a) $\gamma \in CI(E)$;
(b) Si $\beta \in CI(E)$ entonces $\beta \leq \gamma$

Es decir, γ es la máxima cota inferior de E.

△

Ejemplos 2.14. Consideremos a $\mathbb{Q}$ con el orden que hemos construido. En este caso:

1. Si $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x < 0\}$ entonces $CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}$ y $\sup E = 0 \notin E$.
2. Si $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \leq 0\}$ entonces $CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}$ y $\sup E = 0 \in E$.
3. Sea $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 \leq x \ , \ x^2 \leq 2\}$ y veamos que este conjunto no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (recordemos que $\nexists\, a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$). Por un lado, E está acotado superiormente y más aun,

$$CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ , \ x^2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ , \ x^2 > 2\}\,.$$

Para verificar lo anterior basta ver que si $e \in E$ ($0 \leq e$ y $e^2 < 2$) y

$$d = e - \frac{e^2 - 2}{e + 2} = \frac{2e + 2}{e + 2} > e \implies d^2 - 2 = \frac{2(e^2 - 2)}{(e + 2)^2} < 0\,.$$

Es decir, $e < d \in E$. Lo anterior indica que si $x \in E$ entonces $x \notin CS(E)$ (completar los detalles para la igualdad de conjuntos de arriba □).

Por otro lado, si $p \in CS(E)$ entonces $p \geq 0$ y $p^2 > 2$. En este caso, $q = p - \dfrac{p^2 - 2}{p + 2} < p$ y vale que

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} > 0 \implies q \in CS(E)\,.$$

Así, no puede haber una mínima cota superior.

△

Definición 2.15. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que A tiene la propiedad de la mínima cota superior si para todo $E \subseteq A$, tal que $E \neq \emptyset$ y esté acotado superiormente, se verifica que existe $\sup E \in A$. △

Recordemos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ se dice *totalmente ordenado* si dados $x, y \in A$ se verifica que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Proposición 2.16. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado con la propiedad de la mínima cota superior. Si $E \subseteq A$, $E \neq \emptyset$ está acotado inferiormente entonces existe $\alpha = \inf E \in A$. Más aún, $\alpha = \sup CI(E)$.*

Demostración. Notemos que por hipótesis $CI(E) \neq \emptyset$; además, como $E \neq \emptyset$ podemos tomar un elemento $e \in E$: en este caso, si $b \in CI(E)$ entonces $b \leq e$. Así, $e \in CS(CI(E))$ es una cota superior para $CI(E) \subseteq A$. Por hipótesis, existe $\alpha = \sup CI(E)$.

Si $e \in E$ entonces, como $E \subseteq CS(CI(E))$ (ver el párrafo anterior) vemos que $\alpha \leq e$, porque α es el mínimo del conjunto $CS(CI(E))$. Así, $\alpha \in CI(E)$.

Supongamos que $d \in A$ es tal que $\alpha < d$; entonces $d \notin CI(E)$, porque $\alpha \in CS(CI(E))$. Así, si $f \in CI(E)$ entonces $\alpha \geq f$ (porque A está totalmente ordenado). Lo anterior muestra que α es el máximo de $CI(E)$. ■

2.3 Cuerpos

Hemos construido $\mathbb{Q}$ de forma que resulta un cuerpo ordenado. Más adelante vamos a construir $\mathbb{R}$ de forma que también resulte un cuerpo ordenado. En general, hay varios argumentos algebraicos que estamos acostumbrados a usar en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ que son válidos en cualquier cuerpo. En lo que sigue recordamos las propiedades formales de un cuerpo y deducimos varios de estos argumentos algebraicos formalmente, usando las propiedades de la definición de cuerpo (spoiler alert: se viene un festival de ejercicios para el lector).

Definición 2.17. Un cuerpo es una terna $(F, +, \cdot)$ tal que F es un conjunto, $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias en F (denominadas suma y multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas para la suma: para todos a, b, $c \in F$

S1. $a + b \in F$ (la operación es cerrada en F o bien definida).

S2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

S3. $a + b = b + a$.

S4. $\exists\, 0 \in F$ tal que $a + 0 = a$.

S5. $\exists - a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$.

Axiomas para la multiplicación: para todos a, b, $c \in F$

M1. $a \cdot b \in F$ (la operación es cerrada en F o bien definida).

M2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

M3. $a \cdot b = b \cdot a$.

M4. $\exists 1 \in F$, $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = a$.

M5. Si $a \neq 0$, $\exists\, a^{-1} \in F$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ley distributiva: para todos a, b, $c \in F$

D. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

△

Obs 2.18. Sea F un cuerpo: en adelante *convenimos* en usar las siguientes notaciones:

$$a - b = a + (-b) \;\;,\;\; a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \;\;,\;\; na = a + \ldots + a\,, \qquad n \geq 1 \text{ términos}$$

$$a^0 = 1 \;\;,\;\; a^n = a \cdots a\,, \qquad n \geq 1 \text{ factores}, \qquad \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}\,.$$

△

Es conveniente recordar que hay cuerpos que son bien distintos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.19. Recordemos que $\mathbb{Z}_5$ (los enteros módulo 5) con la suma y el producto

$$[n] + [m] = [n + m] \quad \text{y} \quad [n] \cdot [m] = [n \cdot m]$$

donde $[n]$ denota la clase módulo 5 para $n \in \mathbb{Z}$, es un cuerpo (finito) (□). △

Las siguientes reglas valen en *todo* cuerpo.

Proposición 2.20. *Sea $(F,+)$ un conjunto dotado de una operación binaria $+$, que satisface los axiomas S1.-S5. Si x, y, $z \in F$ entonces vale que*

1. $x+y=x+z \implies y=z$ *(cancelación).*
2. $x+y=x \implies y=0$ *(unicidad del neutro).*
3. $x+y=0 \implies y=-x$ *(unicidad del opuesto).*
4. $-(-x)=x$.

Demostración. Para verificar 1. usamos los axiomas

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z$$

donde usamos S4 y S3, S5, S2, la hipótesis, y desandamos el camino anterior. Notemos que 2. es un caso particular del ítem 1.: $x+y=x=x+0$ entonces $y=0$. Lo mismo 3: $x+y=0=x+(-x)$ implica que $y=-x$, por el ítem 1. Finalmente, $-x+(-(-x))=0=-x+x$ implica $-(-x)=x$, otra vez por el ítem 1. ■

Proposición 2.21. *Sea $(F,+,\cdot)$ un cuerpo. Si x, y, $z \in F$ entonces vale que*

1. $x\cdot 0=0$.
2. *Si* $y=z \implies x\cdot y=x\cdot z$.
3. *Si* $x\neq 0$, $x\cdot y=x\cdot z \implies y=z$ *(simplificación).*
4. *Si* $x\neq 0$, $y\neq 0$ *entonces* $x\cdot y\neq 0$.
5. *Si* $x\neq 0$, $x\cdot y=x \implies y=1$ *(unicidad de la unidad).*
6. *Si* $x\cdot y=1 \implies x\neq 0$, $y=x^{-1}$ *(unicidad del inverso).*
7. *Si* $x\neq 0$*:* $(x^{-1})^{-1}=x$.
8. $(-x)\cdot y=x\cdot(-y)=-(x\cdot y)$.
9. $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$.

Demostración. Para ver 1. notemos que $x\cdot 0=x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0$; cancelando se tiene que $x\cdot 0=0$. Para ver 2., si $y=z$ entonces $y-z=0$. Por el item anterior $x\cdot(y-z)=x\cdot 0=0$. Por propiedad distributiva $x\cdot y-x\cdot z=0$ y por lo tanto $x\cdot y=x\cdot z$. Para ver 3., si $x\cdot y=x\cdot z$ entonces $x^{-1}\cdot(x\cdot y)=x^{-1}\cdot(x\cdot z)$. Por propiedad asociativa y como $x\cdot x^{-1}=1$ obtenemos el resultado. Para ver 4., si $x\neq 0$ pero $x\cdot y=0$ entonces como $x\cdot 0=0$, se tiene que $x\cdot y=x\cdot 0$ y por simplificación, que $y=0$. Los ítems 5 - 9 son ejercicios ($\square$). ■

Definición 2.22. Un cuerpo ordenado es un cuerpo $(F,+,\cdot)$ junto con un subconjunto $P\subseteq F$ (llamado el cono estrictamente positivo) que satisface:

P1. Para todo $a\in F$ vale una y solo una de las siguientes condiciones:

$$a\in P \quad \text{ó} \quad -a\in P \quad \text{ó} \quad a=0\,.$$

P2. Si a, $b\in P$ entonces $a+b\in P$.

P3. Si a, $b \in P$ entonces $a \cdot b \in P$.

En este caso definimos el orden inducido por P: dados a, $b \in F$ entonces

$$a \leq b \quad \text{si y solo si} \quad a = b \quad \text{ó} \quad b - a \in P\,.$$

△

Obs 2.23. Sea F un cuerpo ordenado y sea $P \subseteq F$ el cono estrictamente positivo. Entonces el orden inducido por P es (efectivamente) una relación de orden total. Notemos que $x \leq x$ vale por definición; por otro lado, si $x \leq y$, $y \leq x$ entonces: si $x \neq y$ se tiene que $y - x \in P$ y $x - y = -(y - x) \in P$, que contradice P1 (con $a = y - x$). Así, $x = y$ necesariamente. Finalmente, la transitividad es consecuencia de P2, (□).

Además, el orden es total: sean a, $b \in F$: si $a = b$ entonces $a \leq b$; si $a \neq b$ entonces $b - a \neq 0$ y se debe verificar (por P1.) que: $b - a \in P$ en cuyo caso $a \leq b$ o $-(b - a) = a - b \in P$ en cuyo caso $b \leq a$. △

Ejemplo 2.24. Notemos que $P = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0\} \subseteq \mathbb{Q}$ verifica las propiedades de la definición anterior. De hecho, el orden inducido por P coincide con el orden usual en $\mathbb{Q}$ que hemos introducido en su construcción. En particular, el orden en $\mathbb{Q}$ es total. △

Proposición 2.25. *Sea F un cuerpo ordenado con cono estrictamente positivo $P \subseteq F$. Entonces*

1. $P = \{x \in F : \ x \neq 0 \ , \ x \geq 0\} = \{x \in F : \ x > 0\}$.
2. *Si $y \geq z$ entonces $x + y \geq x + z$, para $x \in F$.*
3. *Si $x \geq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \geq x \cdot z$.*
4. *Si $x \leq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \leq x \cdot z$.*
5. *Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en particular, $1 \cdot 1 = 1 > 0$).*
6. *Si $0 < x \leq y$ entonces $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.*

Demostración. Notemos que $x \geq 0$ si y solo si $x = 0$ o $x - 0 = x \in P$. Así, si $x \geq 0$ y $x \neq 0$ entonces $x \in P$. Recíprocamente, si $x \in P$ entonces $x \neq 0$ (por P1) y $x - 0 = x \in P$ implica que $x \geq 0$; lo anterior prueba el ítem 1.

Para ver 2. si $y \geq z$ entonces $y = z$ o $y - z \in P$. Si $y = z$ entonces $x + y = x + z$ y vale que $x + y \geq x + z$; si $y - z \in P$ entonces $(x + y) - (x + z) = y - z \in P$ que muestra que $x + y \geq x + z$.

Para ver 3. notemos que si $x = 0$ o $y = z$ entonces la conclusión vale de forma trivial. Así, podemos suponer que $x \in P$ y $y - z \in P$: en este caso por P3. se tiene que $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z \in P$, que muestra que $x \cdot y \geq x \cdot z$.

Los ítems 4, 5 y 6. se verifican con argumentos similares (□). ■

Hay otras formas posibles de definir un orden en un cuerpo, tal que este orden sea compatible con la estructura algebraica. Acá va otra:

Proposición 2.26. *Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo y sea $\leq$ una relación de orden total en F que satisface:*

O1. Si $y > z$ entonces $y + x > z + x$, para todo $x \in F$.

O2. Si $0 < x$, $0 < y$ entonces $0 < x \cdot y$.

Si definimos $P = \{x \in F : \ 0 < x\}$ entonces P resulta un cono estrictamente positivo en F tal que el orden inducido por P (que lo notamos $\leq_P$ para no confundir) coincide con $\leq$.

Demostración. Ejercicio □.

En lo que sigue decimos que un cuerpo $(F, +_F, \cdot_F)$ contiene al cuerpo $(K, +_K, \cdot_K)$ si existe una función $\Phi : K \to F$ que respeta la estructura de K: $\Phi(0_K) = 0_F$, $\Phi(1_K) = 1_F$, $\Phi(x +_K y) = \Phi(x) +_F \Phi(y)$, $\Phi(x \cdot_K y) = \Phi(x) \cdot_F \Phi(y)$, para todos x, $y \in K$. Notar que una tal función debe ser inyectiva. En efecto: notemos primero que si $x \in K$, $x \neq 0$ entonces

$$1_F = \Phi(x \cdot_K x^{-1}) = \Phi(x) \cdot_F \Phi(x^{-1})$$

que muestra que $\Phi(x) \neq 0_F$ (que $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1}$ es decir, Φ respeta los inversos). Así, si $\Phi(x) = \Phi(y)$ entonces $\Phi(x - y) = 0_F$ y $x - y = 0_K$, es decir $x = y$. Si además F y K son cuerpos ordenados con conos P_F y P_K pedimos que se verifique: $x \in P_K$ si y solo si $\Phi(x) \in P_F$.

Ahora podemos desarrollar la construcción tan esperada de $\mathbb{R}$, junto con las propiedades derivadas de su construcción.

Teorema 2.27. *Existe un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y tal que el orden en $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.*

Demostración. Vamos a desarrollar la prueba en pasos. Comenzamos definiendo $\mathbb{R}$ como conjunto, a través de una descripción de sus elementos (que son llamados cortaduras).

Paso 1: Una cortadura es cualquier subconjunto $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades:

C1. $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

C2. Si $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$ entonces $q \in \alpha$.

C3. Si $p \in \alpha$ entonces existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$.

Cabe aclarar que el orden que figura en C2. y C3. es el orden de $\mathbb{Q}$, como lo hemos construido. En adelante seguimos la siguiente convención: $p, q, r \in \mathbb{Q}$ mientras que α, β, γ son cortaduras.

Ya podemos definir $\mathbb{R}$ como conjunto: $\mathbb{R}$ es el conjunto formado por todas las cortaduras. Si $p \in \mathbb{Q}$ entonces definimos $p^* = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < p\}$ y es sencillo verificar que p^* es una cortadura (es decir, $p^* \in \mathbb{R}$) □.

En este paso definimos además una relación de orden en $\mathbb{R}$: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha \subseteq \beta$ (acá usamos que las cortaduras son, formalmente, conjuntos). Es claro que lo anterior define un orden.

Veamos que el orden es total: sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta \not\leq \alpha$ (es decir, $\beta \not\subseteq \alpha$). En este caso, existe $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Como $\alpha \neq \emptyset$ (por C1.), sea $q \in \alpha$ arbitrario; entonces $p \not\leq q$, porque de otra forma $p \leq q$ y luego $p \in \alpha$ (por C2.). Así, como el orden en $\mathbb{Q}$ es total, vemos que $q \leq p$ que muestra que $q \in \beta$ (por C2.). Lo anterior muestra $q \in \alpha \implies q \in \beta$ y entonces $\alpha \subseteq \beta$; es decir, $\alpha \leq \beta$.

Paso 2. Veamos que $(\mathbb{R}, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y tal que E está acotado superiormente. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de E, es decir tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha \in E$. Definimos

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists \alpha \in E \ , \ p \in \alpha\}.$$

Veamos que γ es una cortadura:

C1: $\gamma \neq \emptyset$, porque si $\alpha \in E$ ($E \neq \emptyset$) entonces $\emptyset \neq \alpha \subseteq \gamma$. Además, como $\beta \in \mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \notin \beta$; notemos que si $\alpha \in E$ entonces $\alpha \subseteq \beta$ y luego $\gamma \subseteq \beta$ (por Álgebra I, $\square$). En particular, $r \notin \gamma$ y $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

C2: Sea $p \in \gamma$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$: por definición de γ, existe $\alpha \in E$ tal que $p \in \alpha$; pero entonces por C2 para α vemos que $q \in \alpha$. Finalmente, como $\alpha \subseteq \gamma$, $q \in \gamma$.

C3: Sea $p \in \gamma$; por definición de γ, existe $\alpha \in E$ tal que $p \in \alpha$; pero entonces, por C3. para α, existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$. Otra vez, podemos ver que $r \in \gamma$ y estamos.

Claramente, $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha \in E$ de forma que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota superior para E. Veamos que es la mínima cota superior: si $\delta \in \mathbb{R}$ es tal que $\alpha \leq \delta$ (es decir, $\alpha \subseteq \delta$), para todo $\alpha \in E$, entonces (por álgebra I)

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha \subseteq \delta \implies \gamma \leq \delta \,.$$

Así, $\gamma = \sup E$.

Paso 3. Definimos la suma en $\mathbb{R}$: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ definimos

$$\alpha + \beta = \{p + q : \ p \in \alpha \ , \ q \in \beta\} \,.$$

Notemos que la definición anterior está basada en la suma en $\mathbb{Q}$. Veamos que valen las propiedades S1.-S5. de la Definición 2.17, para la suma así definida.

S1. Veamos que $\alpha + \beta$ es una cortadura: es claro que $\emptyset \neq \alpha + \beta \subseteq \mathbb{Q}$ (porque α y β son no vacíos). Sea r', $s' \in \mathbb{Q}$, $r' \notin \alpha$ y $s' \notin \beta$. Entonces si $r \in \alpha$ y $s \in \beta$ son arbitrarios (como vimos antes) $r < r'$ y $s < s'$: luego $r + s < r' + s'$. Lo anterior dice que $r' + s' \notin \alpha + \beta$ (según la definición de suma de arriba) y vale C1. Para ver C2. sea $p \in \alpha + \beta$ y sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$. Por definición, existen $r \in \alpha$, $s \in \beta$ tales que $q \leq p = r + s$. Como $q - p \leq 0$ entonces $r + (q - p) \leq r$, que muestra que $r + (q - p) \in \alpha$ y entonces $r + (q - p) + s = p + (q - p) = q \in \alpha + \beta$. Finalmente, vemos C3: Sea $p \in \alpha + \beta$. Por definición, existen $r \in \alpha$, $s \in \beta$ tales que $p = r + s$. Por C3 para α y β, existen $r' \in \alpha$, $s' \in \beta$ tales que $r < r'$, $s < s'$ y entonces $p = r + s < r' + s' \in \alpha + \beta$ (por definición).

S2. Es una consecuencia de la asociatividad de la suma en $\mathbb{Q}$: si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ entonces es sencillo verificar ($\square$: se usa que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ y que $\beta + \gamma \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \{(r + s) + t : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta \,, \, t \in \gamma\} = \{r + (s + t) : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta \,, \, t \in \gamma\} \\ &= \alpha + (\beta + \gamma) \,. \end{aligned}$$

S3. es una consecuencia de la conmutatividad de la suma en $\mathbb{Q}$: en efecto,

$$\alpha + \beta = \{r + s : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta\} = \{s + r : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta\} = \beta + \alpha$$

S4. Veamos que $\alpha + 0^* = \alpha$. En efecto, si $r \in \alpha$, $s \in 0^*$ entonces r, $s \in \mathbb{Q}$ y $s < 0$; entonces $r + s < r$ que muestra que $r + s \in \alpha$, por C2. Así, $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$. Por otro lado, dado $r \in \alpha$ sea $q \in \alpha$ tal que $r < q$ (acá usamos C3.) Entonces $s = r - q < 0$ y $r = q + (r - q) \in \alpha + 0^*$, que muestra que $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$. Así, la doble inclusión muestra la igualdad de conjuntos $\alpha + 0^* = \alpha$.

S5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo: definimos

$$\beta = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists\, r \in \mathbb{Q} \,, \, r > 0 \ , \ -p - r = -(p + r) \notin \alpha\} \,.$$

Veamos que $\beta \in \mathbb{R}$ (es una cortadura) y $\alpha + \beta = 0^*$. Sea $s \notin \alpha$ (por C1. para α) y sea $p = -s - 1$: entonces $-p - 1 = s \notin \alpha$. Así, $p \in \beta$ y $\beta \neq \emptyset$. Si $q \in \alpha$, notemos que $-q \notin \beta$: en efecto, si $r > 0$ entonces $-(-q) - r = q - r < q \in \alpha$, de forma que $-(-q) - r \in \alpha$, para $r > 0$. Lo anterior muestra que $\beta \neq \mathbb{Q}$ y vale C1. para β. Sea $p \in \beta$, sea $q \in \mathbb{Q}$, $q \leq p$ y

sea $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$; como $-p \leq -q$ entonces $-p - r \leq -q - r$ que muestra que $-q - r \notin \alpha$ (de otra forma, $-q - r \in \alpha$, $-p - r \leq -q - r$ implican $-p - r \in \alpha$ en contra de la hipótesis). Así, vale C2. para β. Finalmente, si $p \in \beta$, sea $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Entonces $\mathbb{Q} \ni p + r/2 > p$ es tal que existe $r/2 > 0$ y $-(p + r/2) - r/2 = -p - r \notin \alpha$; lo anterior muestra que $p + r/2 \in \beta$ y vale C3 para β: así, $\beta \in \mathbb{R}$.

Sean $r \in \alpha$, $s \in \beta$ arbitrarios; entonces existe $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$, tal que $-s - t \notin \alpha$. Como $-s - t < -s$ entonces $-s \notin \alpha$ de forma que $r < -s$ (de otra forma, $-s \leq r$ que fuerza a que $-s \in \alpha$ por C2.). Así, $r + s < 0$ y vale que $\alpha + \beta \subseteq 0^*$. Por otro lado, sea $v \in 0^*$: entonces $w = -v/2 > 0$, $w \in \mathbb{Q}$. Usando C1. para α, existen $t \in \alpha$ y $u \in \mathbb{Q}$, $u \notin \alpha$: entonces $t < u$ y existen k_0, $k_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $k_0 \cdot w < t < u < k_1 \cdot w$. Sea

$$n = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k_0 \leq k \leq k_1 \, , \, k \cdot w \in \alpha\}$$

notemos que $k_0 \cdot w \in \alpha$ y $k_1 \cdot w \notin \alpha$ de forma que $k_0 \leq n < k_1$, $n \cdot w \in \alpha$ y $(n+1) \cdot w \notin \alpha$. Sea $p = -(n + 2) \cdot w$: como $-p - w = (n + 1) \cdot w \notin \alpha$, vemos que $p \in \beta$; además, $v = n \cdot w + p \in \alpha + \beta$. Como $v \in 0^*$ era arbitrario, vemos que $0^* \subseteq \alpha + \beta$. Así, vale la doble inclusión $\alpha + \beta = 0^*$. En adelante notamos $\beta = -\alpha$.

Paso 4. Veamos que el orden total en $\mathbb{R}$ verifica la propiedad O1. de la Proposición 2.26. En efecto, si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta < \gamma$ i.e. $\beta \subseteq \gamma$ y $\beta \neq \gamma$ (que también notamos como $\beta \subsetneq \gamma$) entonces

$$\alpha + \beta = \{r + s : \ r \in \alpha \, , \, s \in \beta\} \subseteq \{r + s : \ r \in \alpha \, , \, s \in \gamma\} = \alpha + \gamma \, .$$

Si suponemos que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, entonces usando (los hechos ya probados) que existe $-\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + -\alpha = 0^*$, que la suma es asociativa y que 0^* es el neutro para la suma, podemos concluir que $\beta = \gamma$, en contra de nuestra hipótesis. Así, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Por otro lado, si $\alpha > 0^*$ entonces $-\alpha < 0$: en efecto, notemos que por hipótesis, $0^* \subsetneq \alpha$; si $r \in -\alpha$ entonces existe $s > 0$ tal que $-r - s \notin \alpha$; en particular, $0 \leq -r - s$ y $r < r + s \leq 0$ que muestra que $-\alpha \leq 0$. Por otro lado, si $-\alpha = 0$ entonces usando las propiedades S1.-S5. ya probadas, deducimos que $\alpha = 0$, en contra de la hipótesis. Así, $-\alpha < 0$. De forma análoga se verifica la recíproca: $-\alpha < 0$ implica $\alpha > 0$ ($\square$).

Paso 5. Comenzamos definiendo el producto en $\mathbb{R}$ para el caso de α, $\beta > 0^*$. En este caso, existen $r \in \alpha$, $r > 0$ y $s \in \beta$, $s > 0$ (en efecto, existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin 0^*$ implica que $p \geq 0$. Luego, por C3. para α, existe $r \in \alpha$, $r > p \geq 0$; y lo mismo para probar que existe s). Definimos

$$\alpha \cdot \beta = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists r \in \alpha \, , \, r > 0 \, , \, \exists s \in \beta \, , \, s > 0 \, , \, p \leq r \cdot s\} \, .$$

En este caso se verifica que $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$ es decir, es una cortadura ($\square$). Notar que por construcción $\alpha \cdot \beta > 0^*$. Además, si $\alpha \geq 0^*$ y $\beta \geq 0^*$ y alguno es 0^*, definimos $\alpha \cdot \beta = 0^*$.

Con estas definiciones se verifican las propiedades en M1.-M5. y D cuando α, $\beta \geq 0^*$ (aquí consideramos 1^* como la unidad) (un gran $\square$). Finalmente completamos la definición del producto en $\mathbb{R}$ según los siguientes casos:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} -\alpha \cdot -\beta & \alpha \leq 0^*, \, \beta \leq 0^*; \\ -(-\alpha \cdot \beta) & \alpha \leq 0^*, \, \beta \geq 0^*; \\ -(\alpha \cdot -\beta) & \alpha \geq 0^*, \, \beta \leq 0^*. \end{cases}$$

Notemos que los productos a la derecha tienen factores mayores o iguales que cero (para los cuales el producto ya ha sido definido). Usando que valen las propiedades M1.-M5. cuando los factores α, $\beta \geq 0^*$ (ejercicio previo) se puede verificar que las propiedades

M1.-M5. valen en general (para factores α, $\beta \in \mathbb{R}$): el lector intuitivo adivinará: ($\square$). Por ejemplo, para verificar la distributividad

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

hay que considerar varios casos, según los signos de los factores reales involucrados. Por ejemplo, si $\alpha \geq 0^*$, $\beta \leq 0^*$ y $\gamma \geq 0^*$ pueden pasar dos sub-casos: $\beta + \gamma > 0^*$ o $\beta + \gamma \leq 0^*$. Si suponemos además que $\beta + \gamma > 0^*$ entonces, como $-\beta \geq 0^*$

$$\gamma = (\beta + \gamma) + -\beta \implies \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot -\beta$$

donde hemos usado la distributividad cuando todos los factores son mayores o iguales que cero (que asumimos que ya hemos probado en ejercicio anterior). Además, recordemos que por definición

$$\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot -\beta) \implies \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot -\beta + -(\alpha \cdot -\beta) = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

donde hemos cancelado dos términos (usando la propiedad S5. de la Definición 2.17 que ya hemos probado). Dejamos los detalles de considerar los casos restantes y sus verificaciones al lector comprometido. Además, el orden y el producto (ya completamente definidos) satisfacen la propiedad O2. de la Proposición 2.26 ($\square$).

Paso 6. Los pasos anteriores muestran que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo dotado de un orden compatible (inducido por un cono estrictamente positivo). Así, $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. Además, como conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior. Nos resta ver que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo ordenado. Definimos $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(r) = r^* \in \mathbb{R}$. Veamos que Φ respeta la estructura de $\mathbb{Q}$ y el cono estrictamente positivo de $\mathbb{Q}$. Notemos que hemos probado que $0^* = \Phi(0)$ y $1^* = \Phi(1)$ son el neutro y la unidad en el cuerpo $\mathbb{R}$. Veamos que

$$\Phi(r + s) = \Phi(r) + \Phi(s)$$

es decir, $(r + s)^* = r^* + s^*$. En efecto, si $p \in r^* + s^*$ entonces existen u, $v \in \mathbb{Q}$, $u < r$, $v < s$ tales que $p = u + v < r + s$, de forma que $p \in (r + s)^*$. Por otro lado, si $p < r + s$ sea $t \in \mathbb{Q}$ tal que $2t = (r + s) - p > 0$. Sea $r' = r - t \in r^*$, $s' = s - t \in s^*$ y notemos que $p = (r + s) - 2t = r' + s' \in r^* + s^*$. Los hechos anteriores muestran (a través de la doble inclusión de conjuntos) que $r^* + s^* = (r + s)^* \in \mathbb{R}$.

De forma similar se prueba que $\Phi(r \cdot s) = \Phi(r) \cdot \Phi(s)$, es decir $(r \cdot s)^* = r^* \cdot s^*$ ($\square$).

Finalmente, veamos que si $r \in \mathbb{Q}$ es tal que $r > 0$ entonces $r^* > 0^*$: en efecto, notemos que si $p \in 0^*$ entonces $p < 0 < r$ de forma que $p \in r^*$ y $0^* \leq r^*$. Por otro lado, $0 < r/2 \in r^*$, mientras que $r/2 \notin 0^*$, que muestra que $r^* \neq 0^*$. De forma análoga se prueba que si $r^* > 0^*$ (en $\mathbb{R}$) entonces $r > 0$ (en $\mathbb{Q}$). Lo anterior muestra también que Φ es inyectiva y entonces podemos identificar $\mathbb{Q}$ con $\Phi(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ y pensar, como hacemos de aquí en adelante, que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. ■

Como se menciona en la construcción anterior de $\mathbb{R}$, se identifica a $\mathbb{Q}$ con $\Phi(\mathbb{Q})$ para considerar $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: las cortaduras *racionales* de $\mathbb{R}$. Sin embargo, hay otro tipo de cortaduras y por lo tanto $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$ será el conjunto de cortaduras *irracionales* de $\mathbb{R}$. En particular, el conjunto

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

es una cortadura irracional. O sea, no existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $E = r^*$. ($\square$).

Vamos a verificar otras propiedades fundamentales de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.28. *Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo ordenado que hemos construido. Entonces*

1. $\mathbb{R}$ *es arquimediano: si* $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, *entonces existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $n \cdot x > y$.

2. $\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$*: si* $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, *entonces existe* $p \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x < p < y$.

Demostración. Para ver 1. sea

$$A = \{n \cdot x : \quad n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R} \ , \ A \neq \emptyset \, ,$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si suponemos que $\nexists \, n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot x > y$ entonces, $n \cdot x \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Es decir, $y \in \mathbb{R}$ es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y luego existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Como $x > 0$ entonces $\alpha - x < \alpha$, de forma que $\alpha - x$ no es cota superior de A; como $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\alpha - x < n_0 \cdot x$ y luego $\alpha < (n_0 + 1) \cdot x$ con $n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$. Lo anterior contradice que $\alpha = \sup A$ (porque α no sería cota superior de A). Así, debe existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $y < n \cdot x$.

Para ver 2., notemos que $y - x > 0$; por 1. debe existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot (y - x) > 1$ de forma que $n \cdot y > n \cdot x + 1$. Aplicando 1. a los pares $n \cdot x, 1 \in \mathbb{R}$ y $-n \cdot x, 1 \in \mathbb{R}$, con $1 > 0$, vemos que existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tales que $m_1 \cdot 1 = m_1 > n \cdot x$ y $m_2 > -n \cdot x$. Entonces $-m_2 < n \cdot x < m_1$. Sea

$$m = \min\{k \in \mathbb{Z} : \ -m_2 \leq k \leq m_1 \ , \ n \cdot x < k\} \, .$$

Entonces $-m_2 < m \leq m_1$ y $m - 1 \leq n \cdot x < m$ que muestra que

$$n \cdot x < m \leq n \cdot x + 1 < n \cdot y \implies x < \frac{m}{n} < y \, .$$

■

2.4 La recta real extendida

El conjunto de los reales extendidos, notado $\overline{\mathbb{R}}$, está dado por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donde $\pm\infty$ denotan dos elementos (nuevos) que no están en $\mathbb{R}$. En $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos el orden: dados $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \leq y$ si y solo si: $x, y \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$ en el sentido usual o $x = -\infty$ o $y = \infty$. En particular, si $x \in \mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ entonces $-\infty < x < +\infty$. Además, definimos: si $x \in \mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$:

$$x - (-\infty) = +\infty \, , \, x + (-\infty) = -\infty \, , \, x - (+\infty) = -\infty \, , \, x + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty \, , \, +\infty + (+\infty) = +\infty \, , \, \frac{x}{\pm\infty} = 0 \, .$$

Notemos que expresiones del tipo $+\infty - (+\infty)$ o $+\infty + (-\infty)$ no fueron definidas. De forma similar,

$$\text{si} \ \ x > 0 \ : \ x \cdot +\infty = +\infty \, , \, x \cdot -\infty = -\infty$$

mientras que si $x < 0$ entonces $x \cdot +\infty = -\infty$, $x \cdot -\infty = +\infty$. Notemos que expresiones del tipo $0 \cdot \pm\infty$ no han sido definidas. Así, la suma y el producto en $\overline{\mathbb{R}}$ están *parcialmente* definidas.

Obs 2.29. Sea $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$. Entonces existe $\sup E \in \overline{\mathbb{R}}$. En efecto, notemos que $+\infty \in CS(E)$, de forma que $CS(E) \neq \emptyset$. Consideramos los siguientes casos:

1. Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in CS(E)$ (E está acotado superiormente en $\mathbb{R}$) entonces vale alguno de los siguientes sub-casos:

   (a) Si $F = E \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$: en este caso existe $\alpha = \sup F$ y vale que $\alpha = \sup E$ ($\square$).

   (b) $E = \{-\infty\}$ y en este caso $\sup E = -\infty$.

2. Si E no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ (es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $e \in E$ tal que $x < e$) entonces $CS(E) = \{+\infty\}$ y $\sup E = +\infty$ en este caso.

△

2.5 Complejos

En esta sección describimos brevemente la construcción de $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$. Además, incluimos algunos aspectos geométricos (y métricos) de $\mathbb{C}$.

Formalmente, definimos $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como conjunto. En $\mathbb{C}$ podemos definir las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}\,.$$

Teorema 2.30. *Con las definiciones anteriores para la suma y la multiplicación $\mathbb{C}$ resulta un cuerpo con elemento neutro para la suma dado por $(0, 0)$ y elemento neutro para el producto dado por $(1, 0)$. Más aún, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $\Phi(a) = (a, 0)$ es un morfismo de cuerpos que muestra que $\mathbb{C}$ incluye a $\mathbb{R}$ como cuerpo.*

Demostración. Un muuuy largo ejercicio que han resuelto en su mayoría en Álgebra I. □

En general, identificamos $\mathbb{R}$ con $\Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$. De esta forma, si $z = (c, d) \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces notamos $a \cdot z = \Phi(a) \cdot z = (ac, ad) \in \mathbb{C}$ y $a + z = \Phi(a) + z = (a + c, d) \in \mathbb{C}$.

También es usual notar $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$. Notemos que por las definiciones que hemos mencionado

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

Además, $z = (a, b) = a + b \cdot i$ para todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. En este caso, notamos $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$ y $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$ que son las partes reales e imaginarias de $z \in \mathbb{C}$.

Dado $z = a + b \cdot i$ definimos el conjugado de z, notado $\overline{z}$, dado por $\overline{z} = a - b \cdot i = (a, -b) \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.31. *Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2\,i\,\Im(z)$.

Demostración. Ejercicio □.

Notemos que se verifica

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0\,.$$

Definimos el módulo de z, notado $|z|$, como la raíz cuadrada no negativa $|z| = (z \cdot \overline{z})^{1/2} \geq 0$. Para finalizar incluimos una serie de propiedades de $\mathbb{C}$ en el siguiente resultado.

Teorema 2.32. *Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ *si y solo si* $z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
4. $|\Re(z)| \leq |z|$.
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración. Ejercicio □.

Notemos que si $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ entonces podemos considerar $|a|$ en el sentido usual en $\mathbb{R}$ o bien podemos considerar $|a|$ en el sentido del módulo de un número complejo. Pero es sencillo verificar que estas dos expresiones coinciden.

Notemos que no es posible definir un orden en $\mathbb{C}$ que lo convierta en un cuerpo ordenado (□). Así, siempre que escribamos un signo de desigualdad estará implícito (o deberemos verificar) que los números involucrados son reales.

2.6 Conjuntos numerables

En esta última sección del capítulo mencionamos algunos hechos relacionados con los conjuntos numerables. Para hacer esto, primero recordamos brevemente (e informalmente) el concepto de función entre conjuntos.

Dados dos conjuntos A, B, una función $f : A \to B$ es una asignación que a cada elemento $a \in A$ le asigna un único elemento $f(a) \in B$.

1. En este caso, A es denominado el dominio de f y B es denominado el co-dominio de f.
2. Si $E \subseteq A$ consideramos $f(E) = \{f(e) : \ e \in E\} \subseteq B$, la imagen directa de E por f.
3. Si $F \subseteq B$ consideramos $f^{-1}(F) = \{a \in A : \ f(a) \in F\} \subseteq A$, la preimagen de F por f.
4. Recordemos que f es *suryectiva* si $f(A) = B$ y que f es *inyectiva* si siempre que $a, a' \in A$ son tales que $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$.
5. Finalmente, f es biyectiva si es inyectiva y suryectiva a la vez. En ese caso, queda definida la función inversa de f, notada $f^{-1} : B \to A$ tal que las composiciones

$$f \circ f^{-1} = I_B \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = I_A \,,$$

donde $I_A : A \to A$ y $I_B : B \to B$ denotan las funciones identidad de A y B respectivamente.

Definición 2.33. Decimos que los conjuntos A y B son coordinables (o que tienen el mismo cardinal), y notamos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$. △

La definición de que dos conjuntos sean coordinables modela la idea de que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, esta idea es más sutil de lo que parece a primera vista.

Obs 2.34. Sea U un conjunto y consideremos $P(U) = \{A : \ A \subseteq U\}$ el conjunto de partes de U. Entonces la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $P(U)$. Notemos que si $A \in P(U)$ entonces $I_A : A \to A$ es biyección ($\sim$ es reflexiva). Si $A \sim B$ existe $f : A \to B$ biyección; pero $f^{-1} : B \to A$ también es biyección, ejercicio de Álgebra I ($\sim$ es simétrica) y la transitividad de $\sim$ es consecuencia de que la composición de biyecciones es biyección ($\square$). △

En lo que sigue notamos $\mathbb{I}_n = \{1, \ldots, n\}$ al conjunto de los números naturales entre 1 y n, para $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definición 2.35. Sea A un conjunto. Decimos que

1. A es finito si $A = \emptyset$ o existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.
2. A es infinito si A no es finito.
3. A es numerable si $A \sim \mathbb{N}^*$.
4. A es a lo sumo numerable si A es finito o A es numerable.
5. A es no numerable si A no es a lo sumo numerable.

△

Si $A \neq \emptyset$ es finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$ ($\square$ ¡difícil!) y en este caso decimos que A *tiene* n *elementos*, y escribimos $\#(A) = n$ o $|A| = n$. De forma similar, se puede probar que si A y B son conjuntos finitos y no vacíos entonces $A \sim B$ si y solo si A y B tienen la misma cantidad de elementos ($\square$).

Sin embargo, en el caso de conjuntos infinitos, se verifican ciertos hechos que pueden contradecir la noción intuitiva de *cantidad elementos*.

Ejemplos 2.36. Consideremos los siguientes hechos:

1. Sea $k \in \mathbb{N}^*$ y consideramos $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* : \ n \geq k\} \subseteq \mathbb{N}^*$. En general, si $k > 1$ entonces $A_k \subseteq \mathbb{N}^*$ es un subconjunto propio (es decir, $A_k \neq \mathbb{N}^*$). Sin embargo, $A_k \sim \mathbb{N}^*$: de hecho la función $f_k : \mathbb{N}^* \to A_k$ dada por $f_k(m) = m + (k-1)$, $m \in \mathbb{N}^*$, es una biyección.

2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ es un subconjunto propio, y de hecho $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ es infinito: sin embargo, también $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Para verificar esto, consideramos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ es par ;} \\ -(n+1)/2 & n \text{ es impar .} \end{cases}$$

   En este caso se puede verificar que f es una biyección ($\square$).

3. Notemos que no todo conjunto infinito es numerable: consideramos

$$A = \{f : \mathbb{N}^* \to \{0,1\} : \ f \text{ es función } \}.$$

   A es un conjunto infinito; más aún, no hay ninguna suryección $h : \mathbb{N}^* \to A$. En efecto, sea $h : \mathbb{N}^* \to A$ una función arbitraria. Vamos a construir un elemento de A que no está en $h(\mathbb{N}^*)$: para ello notamos $h(n) = f_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Así, $f_n : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ es una función. Definimos la función $f : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ como sigue: dado $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{si } f_n(n) = 1. \end{cases}$$

   La asignación anterior determina a la función $f \in A$; además, si $n \in \mathbb{N}^*$ entonces $f \neq f_n = h(n)$: en efecto, $f(n) \neq f_n(n)$ por construcción (como los valores de las funciones difieren en al menos un punto de su dominio, las funciones no pueden ser iguales). Así, $f \notin h(\mathbb{N}^*)$ y h no es suryectiva.

   Lo anterior muestra que A es no numerable (el razonamiento anterior es conocido como el *argumento diagonal de Cantor*). $\triangle$

El siguiente resultado indica que los conjuntos numerables son los conjuntos infinitos más chicos que podemos considerar.

Proposición 2.37. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Por hipótesis, $A \neq \emptyset$ (de otra forma, sería finito) y existe $b_1 \in A$. Consideremos $A \setminus \{b_1\}$: este conjunto no es vacío (de otra forma, $A = \{b_1\} \sim \mathbb{I}_1$ es finito) y podemos considerar $b_2 \in A \setminus \{b_1\}$; en particular, $b_2 \neq b_1$. Ahora notamos que $A \setminus \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$ y podemos elegir b_3 y continuar. Notemos que una vez elegidos $b_1, \ldots, b_n$ entonces $A \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} \neq \emptyset$ y podemos elegir b_{n+1} de forma que $b_{n+1} \neq b_j$, para $1 \leq j \leq n$. Este proceso se puede continuar: de esta forma, podemos definir $f : \mathbb{N}^* \to A$ dada por $f(n) = b_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}^*$ (la formalización de este procedimiento requiere considerar

el principio de recursión en $\mathbb{N}^*$, que es formalmente similar al principio de inducción, que no consideramos aquí). Notemos que por construcción $f(n+1) = b_{n+1} \neq f(j)$, para todo $1 \leq j \leq n$, que muestra que f es una inyección. Finalmente, definimos $B = f(\mathbb{N}^*) \subseteq A$: entonces $\mathbb{N}^* \sim B$ (usando que $\tilde{f} : \mathbb{N}^* \to B$ tal que $\tilde{f}(n) = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ es una biyección), que muestra que B es un subconjunto numerable de A. ■

Proposición 2.38. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N}^* \to A$ una biyección (que existe, porque A es numerable). Sea $B \subseteq A$. Si B es finito, entonces B es a lo sumo numerable y listo. Si B es infinito, sea

$$M = \{n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \in B\} = f^{-1}(B) \subseteq \mathbb{N}^* .$$

Notemos que $M \neq \emptyset$ es tal que $\tilde{f} : M \to B$ dada por $\tilde{f}(m) = f(m)$, $m \in M$, es una biyección; en particular, $M \sim B$ que muestra que M es infinito. Sea $1 \leq n_1 \in M$ el primer elemento de M (aquí usamos las propiedades de $\mathbb{N}$). Como $M \setminus \{n_1\} \neq \emptyset$ consideramos n_2 el primer elemento de $M \setminus \{n_1\}$; notemos que $n_2 > n_1 \geq 1$ y en particular $n_2 \geq 2$; continuando con este proceso podemos definir $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ tal que $n_m \geq m$: en este caso $M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\} \neq \emptyset$ (de otra forma M sería finito) y podemos considerar n_{m+1} el primer elemento de $M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq \mathbb{N}^*$ y luego $n_{m+1} > n_m \geq m$ de forma que $n_{m+1} \geq m + 1$.

Sea $h : \mathbb{N}^* \to B$ dada por $h(m) = f(n_m) \in B$, para $m \geq 1$. Notemos que h es una función inyectiva: si $m \neq m'$ entonces $n_m \neq n_{m'}$ y luego, como f es inyectiva, $f(n_m) \neq f(n_{m'})$. Además, h es suryectiva: si $b \in B$ entonces existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(m) = b$ (porque f es suryectiva) y entonces se debe verificar que $b = h(k)$ para algún $1 \leq k \leq m$ (□). En particular, $B \sim \mathbb{N}^*$ y B es numerable. ■

Recordemos que dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ podemos construir el producto cartesiano

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_j \in A_j \ , \ 1 \leq j \leq n\} .$$

Proposición 2.39. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces el producto cartesiano $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.*

Demostración. Notemos que A es conjunto infinito (es sencillo coordinar un subconjunto de A con $\mathbb{N}^*$). Para ver que A es numerable usamos el resultado anterior: en este caso, basta mostrar que A es (coordinable con) un subconjunto de un conjunto numerable. Notemos primero que A es coordinable con $(\mathbb{N}^*)^n = \mathbb{N}^* \times \ldots \times \mathbb{N}^*$ (n factores). En efecto, por hipótesis existen biyecciones $f_j : A_j \to \mathbb{N}^*$, para $1 \leq j \leq n$: en este caso podemos definir $f : A \to (\mathbb{N}^*)^n$ dada por $f(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1), \ \ldots, \ f_n(a_n)) \in (\mathbb{N}^*)^n$, para $(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Es sencillo verificar que f es biyección (□), y entonces $A \sim (\mathbb{N}^*)^n$. Ahora veamos que $(\mathbb{N}^*)^n$ es coordinable con un subconjunto de $\mathbb{N}$. Para eso, sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}^*$ números primos distintos dos a dos ($p_i \neq p_j$ si $i \neq j$) y definamos la función $h : (\mathbb{N}^*)^n \to \mathbb{N}^*$ dada por $h(r_1, \ldots, r_n) = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n} \in \mathbb{N}^*$, para $(r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Por el teorema fundamental de la Aritmética concluimos que h ¡es inyectiva! (□). Luego, si $B = h((\mathbb{N}^*)^n) \subseteq \mathbb{N}^*$ vemos que $h : (\mathbb{N}^*)^n \to B$ es una biyección. En resumen, $A \sim (\mathbb{N}^*)^n \sim B$. Como B es un subconjunto infinito de un conjunto numerable, el resultado anterior muestra que $B \sim \mathbb{N}^*$. Como $\sim$ es una relación transitiva, $A \sim \mathbb{N}^*$ ■

Corolario 2.40. $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración. Consideramos $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$: entonces, simplificando factores primos comunes, podemos escribir $q = \dfrac{a}{b}$ tales que a, $b \in \mathbb{N}^*$ son co-primos, es decir $(a, b) = 1$: en

este caso, la escritura (que se llama fracción reducida) es única (□). De forma análoga, si $q < 0$ entonces podemos escribir $q = \frac{a}{b}$ tales que $-a$, $b \in \mathbb{N}^*$ y $(a, b) = 1$ y la escritura también es única. Ahora podemos definir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(q) = (a, b)$ tal que $q = \frac{a}{b}$ es fracción reducida, si $q \neq 0$ y $f(0) = (0, 0)$. Entonces f es una función inyectiva: como $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}^*$ (por el resultado anterior), concluimos que $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q})$ y que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es un conjunto numerable. Así, $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q}) \sim \mathbb{N}^*$ (los detalles quedan como □).

Proposición 2.41. *Supongamos que para cada $j \in \mathbb{N}^*$ tenemos un conjunto numerable E_j y definamos*

$$E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} E_j = \{x : \ \exists j \in \mathbb{N}^* \ , \ x \in E_j\} .$$

Entonces E es numerable.

Demostración. Es sencillo verificar que E es conjunto infinito. Por hipótesis, para $j \in \mathbb{N}^*$ existe una biyección $f_j : E_j \to \mathbb{N}^*$. Dado $e \in E$ consideramos $M_e = \{j \in \mathbb{N}^* : \ e \in E_j\} \neq \emptyset$ y definimos $n_0(e) \in \mathbb{N}^*$ como el primer elemento de M_e. En este caso, asignamos el valor $f(e) = (n_0(e), f_{n_0(e)}(e)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Lo anterior determina una función $f : E \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ que resulta inyectiva: si $e \neq e'$ entonces: si $n_0(e) \neq n_0(e')$ vale que $f(e) \neq f(e')$ (difieren en la primera coordenada) y si $n_0(e) = n_0(e')$ entonces $f_{n_0(e)}(e) \neq f_{n_0(e')}(e')$ porque $f_{n_0(e')}$ es inyectiva, y $f(e) \neq f(e')$ (difieren en la segunda coordenada). Así, $E \sim f(E) \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}^*$. Por la Proposición 2.38 tenemos que $\mathbb{N}^* \sim f(E) \sim E$ y E es numerable.

■

2.7 Ejercicios del texto

2.1. Probar que Principio de buena ordenación es equivalente al Principio de inducción.

2.2. Dada la operación binaria $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $n \cdot m = 0$ si $n = 0$ o

$$n \cdot m = \underbrace{m + \ldots + m}_{\text{suma de } n \text{ términos}} \in \mathbb{N} .$$

Probar que esta operación verifica: para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$

P1. Asociatividad: $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.

P2. Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$.

P3. Existencia de neutro: $1 \cdot n = n$.

P4. si $n \cdot m = 0$ entonces $n = 0$ o $m = 0$.

P5. Si $m \leq p$ entonces $n \cdot m \leq n \cdot p$.

D. Distributividad: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$.

2.3. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = p + n \in \mathbb{N} .$$

Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

2.4. Dada la operación binaria $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$[(m, n)] + [(p, q)] = [(m + p, n + q)] \in \mathbb{Z} .$$

Probar que la operación en $\mathbb{Z}$ queda bien definida en función de la suma en $\mathbb{N}$.

2.5. Probar además que la suma en $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades S1-S5.

2.6. Definido el producto en $\mathbb{Z}$ dado por $[(m,n)]\cdot[(p,q)] = [(mp+nq, mq+np)]$, probar que se verifican las propiedades P1.-P3. en $\mathbb{Z}$. Además, probar que vale que

$$[(m,n)]\cdot[(p,q)] = 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow [(m,n)] = 0_{\mathbb{Z}} \quad \text{ó} \quad [(p,q)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

Por último, probar que la propiedad anterior garantiza la simplificación.

2.7. Demostrar que se verifica la propiedad D (distributiva) en $\mathbb{Z}$.

2.8. Demostrar que el orden el $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades O2 y O3 en $\mathbb{Z}$. Además, probar que se verifica P5 siempre que $n \in \mathbb{N}$.

2.9. Definimos $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y consideramos una relación en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* = \{(p,q) :\ p\in\mathbb{Z}\,,\ q\in\mathbb{Z}^*\}$ dada por

$$(p,q) \approx (r,s) \Leftrightarrow p\cdot s = r\cdot q\,.$$

Probar que $\approx$ es una relación de equivalencia.

2.10. Probar que $\mathbb{Q}$ verifica las propiedades S1.-S4., P1.-P3, P4' y D.

2.11. Probar que si consideramos $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\gamma(p) = \overline{(p,1)} \in \mathbb{Q}$ entonces γ es una función inyectiva que respeta toda la estructura de $\mathbb{Z}$ que hemos considerado: la suma, el producto y el orden.

2.12. Sea $E = \{x\in\mathbb{Q} :\ 0\le x\ ,\ x^2\le 2\}$. Probar que no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

2.13. Probar el ejemplo 2.19: demostrar que $\mathbb{Z}_5$ (los enteros módulo 5) con la suma y el producto

$$[n]+[m] = [n+m] \quad \text{y} \quad [n]\cdot[m] = [n\cdot m]$$

donde $[n]$ denota la clase módulo 5 para $n\in\mathbb{Z}$, es un cuerpo (finito).

2.14. Demostrar los siguientes ítems de la Proposición 2.21: Sea $(F,+,\cdot)$ un cuerpo. Probar que si x, y, $z\in F$ entonces vale que

1. Si $x\neq 0$: $x\cdot y = x \implies y = 1$ (unicidad de la unidad).
2. Si $x\cdot y = 1 \implies x\neq 0\ ,\ y = x^{-1}$ (unicidad del inverso).
3. Si $x\neq 0$: $(x^{-1})^{-1} = x$.
4. $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -(x\cdot y)$.
5. $(-x)\cdot(-y) = x\cdot y$.

2.15. Sea $(F,+,\cdot)$ un cuerpo ordenado junto con un subconjunto $P\subseteq F$ (llamado el cono estrictamente positivo). Probar que la transitividad es consecuencia de la propiedad P2 (si a, $b\in P$ entonces $a+b\in P$).

2.16. Demostrar los siguientes ítems de la Proposición 2.25: Sea F un cuerpo ordenado con cono estrictamente positivo $P\subseteq F$. Probar:

1. Si $x\le 0$, $y\ge z$ entonces $x\cdot y\le x\cdot z$.
2. Si $x\neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en particular, $1\cdot 1 = 1 > 0$).
3. Si $0 < x\le y$ entonces $0 < y^{-1}\le x^{-1}$.

2.17. Demostrar la Proposición 2.26: Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo y sea $\leq$ una relación de orden *total* en F que satisface:

O1. Si $y > z$ entonces $y + x > z + x$, para todo $x \in F$.

O2. Si $0 < x$, $0 < y$ entonces $0 < x \cdot y$.

Demostrar que si definimos $P = \{x \in F : \ 0 < x\}$ entonces P resulta un cono estrictamente positivo en F tal que el orden inducido por P (que lo notamos $\leq_P$ para no confundir) coincide con $\leq$.

2.18. Demostrar los pasos a completar del Teorema 2.27. Es decir, probar que existe un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y tal que el orden en $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.

2.19. Ver que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es no vacío demostrando que $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ es una cortadura y que no existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $E = r^*$.

2.20. Completar la demostración de la observación 2.29: Sea $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$ y sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in CS(E)$ (E está acotado superiormente en $\mathbb{R}$). Probar que si $F = E \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$: en este caso existe $\alpha = \sup F$ y vale que $\alpha = \sup E$.

2.21. Demostrar el Teorema 2.30: Con las definiciones anteriores para la suma y la multiplicación probar que $\mathbb{C}$ resulta un cuerpo con elemento neutro para la suma dado por $(0, 0)$ y elemento neutro para el producto dado por $(1, 0)$. Más aún, probar que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $\Phi(a) = (a, 0)$ es un morfismo de cuerpos que muestra que $\mathbb{C}$ incluye a $\mathbb{R}$ como cuerpo.

2.22. Demostrar el Teorema 2.31: Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2\,i\,\Im(z)$.

2.23. Demostrar el Teorema 2.32: Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Probar que

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
4. $|\Re(z)| \leq |z|$.
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

2.24. Notemos que si $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ entonces podemos considerar $|a|$ en el sentido usual en $\mathbb{R}$ o bien podemos considerar $|a|$ en el sentido del módulo de un número complejo. Probar que estas dos expresiones coinciden.

2.25. Demostrar que no es posible definir un orden en $\mathbb{C}$ que lo convierta en un cuerpo ordenado.

2.26. Demostrar la observación 2.34: Sea U un conjunto y consideremos $P(U) = \{A : \ A \subseteq U\}$ el conjunto de partes de U. Probar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $P(U)$.

2.27. Demostrar que si $A \neq \emptyset$ es finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

2.28. Demostrar que si A y B son conjuntos finitos y no vacíos entonces $A \sim B$ si y solo si A y B tienen la misma cantidad de elementos.

2.29. Completar la demostración del ejemplo 2.36: Probar que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Para ello, consideramos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ es par ;} \\ -(n+1)/2 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

y demostrar que f es una biyección.

2.30. Completar la demostración de la Proposición 2.38: Probar que todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.

2.31. Completar la demostración de la Proposición 2.39: Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Probar que el producto cartesiano $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

2.32. Completar la demostración del Corolario 2.40: Demostrar que $\mathbb{Q}$ es numerable.

2.8 Ejercicios nuevos

2.33. Sea K un cuerpo ordenado. Demostrar

1. (Desigualdad de Bernoulli). Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x > -1$ en K vale $(1+x)^n \geq 1+nx$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a y $a+x$ positivos. Probar que $(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x$.
3. (Identidad de Lagrange) $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2$.
4. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$.
5. (Desigualdad de Minkowski): $\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$.

2.34. Considerar a racional no nulo y x irracional. Demostrar que ax y $a+x$ son irracionales. Si y es irracional, ¿es cierto que xy es irracional? ¿es cierto que $x+y$ es irracional?

2.35. Probar que el conjunto $a + b\sqrt{2}$ con a y b racionales es un cuerpo ordenado, con las operaciones inducidas y el orden inducido.

2.36. Demostrar que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$: si x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ entonces existe $r \in \mathbb{I}$ tal que $x < r < y$.

2.37. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Denotamos por s una cota superior de S y por r una cota inferior de S.

a) Demostrar que $r \leq s$.

b) Demostrar que $s = \sup(S)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in S$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

c) Demostrar que $r = \inf(S)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $b \in S$ tal que $r \leq b < r + \varepsilon$.

2.38. Hallar cotas superiores e inferiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos de números reales:

a) $A = (-\infty, 1)$.

b) $B = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

c) $C = [-2, 1)$.

d) $D = \left\{ \frac{1}{x^2} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$.

e) $E = \left\{ \frac{1}{1+x} : x \in \mathbb{R} - \{-1\} \right\}$.

f) $F = (-2, -1) \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

2.39. Considerar $A \subseteq B$ subconjuntos no vacíos y acotados en $\mathbb{R}$. Demostrar que

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

2.40. Considerar A y B subconjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$.

b) $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

2.41. Demostrar que son equivalentes:

1. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ es no acotado.
2. Para todo $z \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < n$.
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.
4. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < x$.

2.42.

a) Demostrar usando la propiedad Arquimediana que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n \geq N$,
$$\left| \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 2n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon.$$

b) Sea
$$A = \left\{ \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 2n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$
Calcular el ínfimo y el supremo de A.

2.43. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos acotados y no vacíos. Se sabe que para todo $a \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $|b - a| < \varepsilon$. Probar que $\inf(A) \leq \sup(B)$. Dar un ejemplo donde valga la igualdad y otro donde no.

2.44. Considerar $B \subseteq A$ conjuntos no vacíos de números reales. Se sabe que A está acotado superiormente y que para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x \leq y$. Demostrar que $\sup A = \sup B$.

2.45. Dados A, $B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y acotados. Definimos

$$A + B = \{x + y : x \in A,\, y \in B\} \qquad A.B = \{x.y : x \in A,\, y \in B\}$$
$$-A = \{-x : x \in A\} \qquad |A| = \{|x| : x \in A\}$$

1. Probar que:
   a) $A + B$, $A.B$, $-A$ y $|A|$ son acotados.
   b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ y $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
   c) $\inf(A) = -\sup(-A)$ y $\sup(A) = -\inf(-A)$
   d) Si todos los números de A y B son positivos entonces $\inf(A.B) = \inf(A).\inf(B)$.
   e) Si todos los números de A y B son positivos entonces $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$.
   f) $|\sup A| \leq \sup|A|$ y $\inf|A| \leq |\inf A|$.
2. Considerar $X \subseteq \mathbb{R}$ y sean f, $g : X \to \mathbb{R}$ funciones acotadas.
   a) Mostrar que $(f + g)(X) \subseteq f(X) + g(X)$ y que $f + g$ es acotada.
   b) Mostrar que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ y $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.
   c) Dar ejemplos donde las desigualdades anteriores quedan estrictas.
   d) Mostrar que $(f.g)(X) \subseteq f(X).g(X)$ y que $f.g$ es acotada.
   e) Mostrar que si f y g son no negativas entonces $\sup(f.g) \leq \sup(f).\sup(g)$ y $\inf(f.g) \geq \inf(f).\inf(g)$.
   f) Dar ejemplos donde las desigualdades anteriores quedan estrictas.

2.46. Demostrar que si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

$$\left|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)\right| \leq \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|\,.$$

2.47. (*) El propósito del ejercicio es definir la potenciación a^b en el cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y que tiene la propiedad de la mínima cota superior.

O sea, para cada $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ existe a^x con las propiedades habituales de la potenciación.

- En primer lugar, para $a \neq 0$, definimos

$$a^0 = 1, \qquad a^n = \overbrace{a.a\ldots a}^{n \text{ veces}} \quad \text{y} \quad a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

  a) Mostrar que para n, $m \in \mathbb{Z}$ se cumplen

$$a^{n+m} = a^n.a^m \qquad (a^n)^m = a^{n.m}$$

  b) Sean a y b no nulos y $n \in \mathbb{Z}$. Demostrar que $(a.b)^n = a^n.b^n$.
  c) Sean a y b positivos y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $a < b$ si y solo si $a^n < b^n$.

- En segundo lugar, considerar $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}^*$
  a) Demostrar que hay un único $y > 0$ tal que $y^n = a$.
  Ese número y se denota $y = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

  Sugerencias paso a paso:

i) Mostrar que $A = \{t \geq 0 : t^n \leq a\}$ es no vacío y acotado superiormente. Definir $y = \sup A$.

ii) Mostrar que si $y^n < a$ entonces cualquier $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{a - y^n}{(y+1)^n - y^n}\}$ cumple que $(y + \varepsilon)^n < a$.

iii) Mostrar que si $y^n > a$ entonces cualquier $0 < \varepsilon < \min\{y, \frac{y^n - a}{ny^{n-1}}\}$ cumple que $y - \varepsilon \notin A$.

iv) Deducir que $y^n = a$.

v) Demostrar que no existe otro $\hat{y} > 0$ tal que $\hat{y}^n = a$.

b) Sean a y b positivos y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $a < b$ si y solo si $a^{1/n} < b^{1/n}$.

c) Sean a y b positivos y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $(a.b)^{1/n} = a^{1/n}.b^{1/n}$.

d) Sean $a > 0$ y n, $m \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $(a^{1/n})^{1/m} = a^{1/(nm)}$.

- En tercer lugar, sea $a > 0$.

a) Si m, n, p y q son enteros, $n > 0$, $q > 0$, y $r = m/n = p/q$ demostrar que

$$(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}.$$

Por lo tanto, no hay ambigüedad en definir $a^r = (a^m)^{1/n}$.

b) Sean a y b positivos y $r \in \mathbb{Q}$. Demostrar que $(a.b)^r = a^r.b^r$.

c) Demostrar que, para r y s racionales, $a^{r+s} = a^r.a^s$ y $(a^r)^s = a^{rs}$.

d) Sea $a > 1$, r y s racionales. Demostrar que $r < s$ si y solo si $a^r < a^s$.

- A continuación, sea $a > 1$.

a) Se define $B_a(x) = \{a^s : s \in \mathbb{Q},\ s \leq x\}$.
Demostrar que, para $r \in \mathbb{Q}$, es $a^r = \sup B_a(r)$.
Se define, para $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \sup B_a(x)$.

b) Demostrar que, para x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple $a^{x+y} = a^x.a^y$.

c) Para x e y reales, demostrar que $x < y$ si y solo si $a^x < a^y$.

- Por último, para todo x se define $1^x = 1$ y para $0 < a < 1$ se define $a^x = \left(a^{-1}\right)^{-x}$.

Sean a y b positivos.

a) Demostrar que $a^{-x} = (a^x)^{-1}$.

b) Demostrar que, para x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple $a^{x+y} = a^x.a^y$ y $(a^x)^y = a^{xy}$.

c) Para x real, demostrar que $(a.b)^x = a^x.b^x$.

2.48. Decidir si existen a y b irracionales tales que a^b es racional.

2.49. (*) El propósito del ejercicio es definir los logaritmos en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

O sea, para cada $a > 0$ ($a \neq 1$) y $x > 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$. Se define $y = \log_a(x)$ y se cumplen las propiedades habituales de los logaritmos.

a) Para $a > 1$, considerar $A = \{w \in \mathbb{R} : a^w < x\}$. Demostrar que existe $y = \sup A$ y que $a^y = x$.

Sugerencias paso a paso:

i) Mostrar que A es no vacío y acotado superiormente (recordar la desigualdad de Bernoulli).

ii) Demostrar que $a - 1 \geq n(a^{1/n} - 1)$.

iii) Demostrar que si $t > 1$ y $n > (a-1)/(t-1)$ entonces $a^{1/n} < t$.

iv) Demostrar que si $a^y < x$ entonces $a^{y+1/n} < x$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

v) Demostrar que si $a^y > x$ entonces $a^{y-1/n} > x$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

vi) Deducir que $a^y = x$.

vii) Demostrar que no existe otro $\hat{y}$ tal que $a^{\hat{y}} = x$.

b) Para $0 < a < 1$ y $x > 0$, se define $\log_a(x) = -\log_{a^{-1}}(x)$.

Demostrar que $a^y = x$ si y solo si $y = \log_a(x)$.

c) Dados a, b, x e y positivos, $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $r \in \mathbb{R}$, demostrar que

- $\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.
- $\log_b(a).\log_a(x) = \log_b(x)$.

3 Espacios métricos

Comenzamos recordando una estructura que ha jugado un papel fundamental al momento de definir la noción de convergencia y continuidad en Análisis I y II. Esta estructura tiene que ver con la noción de distancia euclídea entre puntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Luego, vamos a aislar las propiedades fundamentales de esta noción de distancia y proponer una noción de distancia mucho más general.

3.1 Definiciones y propiedades básicas

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, consideramos

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_j \in \mathbb{R} \ , \ 1 \leq j \leq n\}$$

con su estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En $\mathbb{R}^n$ podemos considerar el producto interno usual: si $a = (a_j)_{j=1}^n$, $b = (b_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\langle a \, , \, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \, b_j \in \mathbb{R} \, .$$

En este caso, para $a = (a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ definimos la norma de a,

$$\|a\| = \langle a \, , \, a \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right)^{1/2} \, .$$

De esta forma, queda definida una función $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica: dados a, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

N1. $\|a\| = 0$ si y solo si $a = 0 \in \mathbb{R}^n$.

N2. $\|\lambda \, a\| = |\lambda| \, \|a\|$.

N3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

La expresión $\|a\|$ es llamada norma euclídea de a o longitud usual de $a \in \mathbb{R}^n$.

En general, si una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisface $N1. - N3.$ decimos que N es una norma. En $\mathbb{R}^n$ se pueden considerar otras normas: por ejemplo, si $a = (a_j)_{j=1}^n$

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \quad \text{y} \quad \|a\|_\infty = \max\{|a_j| : \ 1 \leq j \leq n\}$$

son otras dos normas en $\mathbb{R}^n$ ($\square$). Es interesante notar que ni $\| \cdot \|_1$ ni $\| \cdot \|_\infty$ provienen de un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (porque no satisfacen la identidad del paralelogramo $\square$).

En el caso de los cursos de Análisis I y II, en general se considera la distancia entre dos puntos a, $b \in \mathbb{R}^n$ como la norma euclídea del vector diferencia, es decir $\|b - a\| \geq 0$. En términos de esta noción de distancia se desarrollan las nociones de convergencia, límite y continuidad.

Una pregunta natural sería: cuáles son las propiedades fundamentales de la distancia euclídea que permiten desarrollar nociones de convergencia, límite y continuidad. Por propiedades fundamentales, nos referimos a aquellas propiedades que juegan un papel importante en las pruebas de las propiedades de las nociones de convergencia, límite y continuidad.

Puede resultar sorprendente que en realidad, son unas pocas propiedades las que se usan sistemáticamente: estas propiedades son la simetría de la distancia $\|a-b\| = \|b-a\|$, la desigualdad triangular $\|a-b\| \leq \|a-c\| + \|c-b\|$ y la no-degeneración, es decir, si $\|a-b\| = 0$ entonces $a = b$. En lo que sigue vamos a aislar estas tres propiedades y definir el concepto de métrica (o función distancia) en un conjunto arbitrario.

Definición 3.1. Sea X un conjunto. Una métrica (o distancia) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica: para todos x, y, $z \in X$

D1. $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

D2. $d(x,y) = d(y,x)$.

D3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

En este caso decimos que el par (X,d) es un espacio métrico (EM). △

Obs 3.2. Sea (X,d) un EM y sea $E \subseteq X$. Entonces podemos restringir la métrica en X a una métrica en E es decir, considerar $d_E : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $d_E(x,y) = d(x,y)$, para $x, y \in E$. En este caso, d_E es una métrica en E obtenida por restricción de d (□) y decimos que (E, d_E) es un *subespacio métrico* (Ojo: esto es un nombre o convención). △

Ejemplo 3.3. Consideremos el cuerpo de números complejos $\mathbb{C}$. En este caso podemos definir la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $d(x,y) = |x-y|$ (módulo de la diferencia de complejos). Las propiedades del módulo en $\mathbb{C}$ vistas en el capítulo anterior muestran que d es una distancia en $\mathbb{C}$ (que es llamada distancia usual en $\mathbb{C}$) □.

Más aún, dados a, $b \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, la distancia entre a y b en el espacio métrico $\mathbb{R}$ con su métrica usual coincide con la distancia entre a y b en el espacio métrico $\mathbb{C}$ con su métrica usual (que en ambos casos es $|b-a|$). De esta forma, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ es un subespacio métrico. △

Ejemplo 3.4. Es un hecho interesante que si partimos de cualquier norma $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, y consideramos $d_N : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $d_N(a,b) = N(a-b)$, entonces d_N es una función distancia. En efecto, es claro que $d_N(a,b) = N(a-b) = 0$ si y solo si $a - b = 0$ (por N1.) , es decir, si $a = b$. Además,

$$d_N(a,b) = N(a-b) = N(-(b-a)) = |-1|\, N(b-a) = N(b-a) = d_N(b,a)\,,$$

donde hemos usado N2. Finalmente, notemos que si $c \in \mathbb{R}^n$

$$d_N(a,b) = N(a-b) = N((a-c)+(c-b)) \leq N(a-c) + N(c-b) = d_N(a,c) + d_N(c,b)$$

donde hemos usado N3. △

Ejemplo 3.5. Sea (X,d) un EM y sea Y un conjunto. Si $f : Y \to X$ es una función inyectiva entonces $d_f : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d_f(y,y') = d(f(y), f(y')) \quad \text{para} \quad y,\, y' \in Y$$

es una métrica □.

Como caso particular de lo anterior consideremos $(-\pi/2, \pi/2)$ con su estructura de espacio métrico usual (como subespacio de $\mathbb{R}$). Entonces podemos considerar la métrica en $\mathbb{R}$ inducida por la función $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$: es decir,

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad \text{para} \quad x,\, y \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que la métrica d verifica que $d(x,y) < \pi$, para todo x, $y \in \mathbb{R}$. △

Obs 3.6. Todas las normas pueden usarse para crear una función distancia como vimos en el ejemplo 3.4, pero no todas las distancias tienen una norma correspondiente, ni siquiera en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, una distancia trivial sin norma equivalente es $d(x,x) = 0$ y $d(x,y) = 1$, cuando $x \neq y$ ($\square$). Otra distancia en $\mathbb{R}$ sin norma equivalente es $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Sin embargo, en general, al trabajar en $\mathbb{R}^n$, la distancia utilizada es la inducida por una norma, y las distancias inusuales suelen emplearse para ilustrar otros conceptos matemáticos.

$\triangle$

Ejemplo 3.7. Consideramos

$$\ell_\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} : \ \{|f(n)| : \ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R} \text{ está acotado superiormente } \}.$$

Entonces $\ell_\infty(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con la suma y la acción escalar puntual: es decir, dados $f, g \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si definimos

$$\lambda f + g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad (\lambda f + g)(n) = \lambda f(n) + g(n) \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}^*$$

entonces $\lambda f + g \in \ell_\infty(\mathbb{R})$. Si $f \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ definimos

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : \ n \in \mathbb{N}^*\} \geq 0$$

(que está bien definido en $\mathbb{R}$ porque asumimos que $f \in \ell_\infty(\mathbb{R})$). Entonces $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\ell_\infty(\mathbb{R})$ (todo lo anterior es ejercicio $\square$). Finalmente, definimos $d : \ell_\infty(\mathbb{R}) \times \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$, que es una métrica.

El espacio métrico $(\ell_\infty(\mathbb{R}), d_\infty)$ tiene muchas propiedades interesantes y bien distintas de las propiedades de $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual. $\triangle$

Como se ha visto en Análisis II, los subconjuntos *abiertos* y *cerrados* de $\mathbb{R}^n$ juegan un papel importante al momento de estudiar varias propiedades relacionadas con la convergencia, límite y continuidad. En lo que sigue, vamos a definir nociones análogas pero en el contexto general de espacios métricos.

Definición 3.8. Sea (X,d) un EM, sea $E \subseteq X$ y sea $p \in X$.

1. Dado $r > 0$ definimos
$$B_r(p) = \{y \in X : \ d(p,y) < r\}$$
llamada *bola abierta* de centro p y radio r.
2. Decimos que $p \in X$ es punto límite de E si para todo $r > 0 : \ (B_r(p) \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$.
3. Notamos E' al conjunto de todos los puntos límites de E.
4. Decimos que $p \in E$ es un punto interior a E si existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subseteq E$.
5. Notamos E^o al conjunto de todos los puntos interiores de E.
6. Dado $p \in E$ decimos que es aislado si $p \notin E'$.
7. Notamos $\text{Ais}(E)$ al conjunto de todos los puntos aislados de E.
8. Decimos que E es *cerrado* si $E' \subseteq E$.
9. Decimos que E es *abierto* si $E = E^o$
10. Decimos que E es acotado si existe $r > 0$ y $q \in X$ tal que $E \subseteq B_r(q)$.
11. Decimos que E es denso si $X = E \cup E'$.

△

Obs 3.9. Varios de los conceptos anteriores heredan sus nombres por la analogía formal que tienen con las construcciones realizadas en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea. Sin embargo, estas nociones difieren en algunos sentidos con ciertas características típicas de la métrica euclídea. Para ver esto, se sugiere dibujar las bolas $B_1(0)$ en $X = \mathbb{R}^2$ de centro $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ y de radio uno, con respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|$ (norma euclídea), $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ ($\square$).

Por otro lado, los conjuntos subyacentes también pueden introducir modificaciones: por ejemplo, si consideramos $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y consideramos el subespacio métrico (E, d_E) donde d es la métrica euclídea, entonces en este subespacio métrico $B_1^{d_E}(0) = \{y \in E : \ d_E(0,y) < 1\} \subseteq E$ es la mitad superior de la bola $B_1^d(0)$ en el espacio métrico inicial $(\mathbb{R}^2, d)$. △

En lo que sigue vamos a probar una serie de afirmaciones que muestran que las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados que estamos acostumbrados a usar siguen valiendo en el contexto más general de espacios métricos.

Obs 3.10. Sea (X,d) un EM. Para cualquier subconjunto $E \subseteq X$ se tiene que $E^o \subseteq E$. En efecto: Sea $p \in E^o$. Por definición de punto interior, existe $r > 0$ tal que la bola abierta está contenida en E: $B_r(p) \subseteq E$. Dado que $p \in B_r(p)$, se deduce que $p \in E$. △

Proposición 3.11. *Sea (X,d) un EM. Si $r > 0$ y $p \in X$ entonces $B_r(p) \subseteq X$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $q \in B_r(p)$; entonces $d(p,q) < r$ de forma que $t = r - d(p,q) > 0$. Veamos que $B_t(q) \subseteq B_r(p)$: en efecto, si $w \in B_t(q)$ entonces $d(w,q) < t$; en este caso, por la desigualdad triangular de la métrica y la simetría

$$d(p,w) \leq d(p,q) + d(q,w) < d(p,q) + t = d(p,q) + (r - d(p,q)) = r$$

que muestra que $w \in B_r(p)$. Así, si $q \in B_r(p)$ entonces $q \in (B_r(p))^o$, por definición de interior. Entonces $B_r(p) \subseteq (B_r(p))^o$ y luego $B_r(p) = (B_r(p))^o$ (porque la inclusión $E^o \subseteq E$ vale siempre, para cualquier $E \subseteq X$). ■

Proposición 3.12. *Sea (X,d) un EM y $E \subseteq X$. Entonces el interior $E^o \subseteq E$ y es un conjunto abierto. Más aún, si $U \subseteq E$ es tal que U es abierto, entonces $U \subseteq E^o$.*

Demostración. Probamos primero la segunda parte: sea $U \subseteq E$ tal que U es abierto: si $x \in U$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U \subseteq E$; en resumen, $x \in E$ es tal que $B_r(x) \subseteq E$. Así, $x \in E^o$ por definición y vale $U \subseteq E^o$. Para la primera parte, notemos que la inclusión $E^o \subseteq E$ siempre se verifica; por otro lado, si $x \in E^o$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq E$. Por la proposición anterior ($B_r(x)$ es abierta) y la primera parte de la prueba, $B_r(x) \subseteq E^o$; de esta forma, E^o es abierto. ■

Con las notaciones del resultado anterior, podemos ver que E^o es el abierto más grande (con respecto al orden de la inclusión) contenido en E.

Proposición 3.13. *Sea (X,d) un EM y sea $E \subseteq X$. Si $p \in E'$ entonces para todo $r > 0$ vale que $B_r(p) \cap E$ es un conjunto infinito.*

Demostración. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito. Consideremos

$$s = \min\{d(p,x_j) : \ 1 \leq j \leq n \ , \ x_j \neq p\} < r \, .$$

Entonces $s > 0$ (el mínimo está bien definido porque se trata de una cantidad finita de números). Notemos que si $x \in (B_s(p) \setminus \{p\}) \cap E$ entonces, como $B_s(p) \subseteq B_r(p)$, $x \in B_r(p) \cap E$ y $x \neq p$. Entonces $x = x_j$ para algún $1 \leq j \leq n$ y $x_j = x \neq p$ implica que $s \leq d(p, x_j) = d(p, x) < s$, que es una contradicción. ■

Corolario 3.14. *Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$ un conjunto finito: entonces $E' = \emptyset$ (y en este caso $E = Ais(E)$).*

Demostración. Ejercicio □.

Ejemplo 3.15. Sea $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea.

1. Si $E = \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ entonces $E^o = \emptyset$, $\text{Ais}(E) = E$ y $E' = \{(0, 0)\}$. E no es abierto ni cerrado; pero E es acotado.

2. Sea $E = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ d(p, (0, 0)) \leq 1\}$. Entonces $E^o = B_1((0, 0))$, $\text{Ais}(E) = \emptyset$, $E' = E$. E es cerrado, no es abierto, y es acotado.

Las afirmaciones anteriores son un ejercicio □. △

Ejemplo 3.16. Sea $a < b < c < d \in \mathbb{R}$ y consideremos $X = (a, b) \cup (c, d)$. En este caso, $X \subseteq \mathbb{R}$ y consideramos el subespacio métrico (X, d_X) obtenido de restringir la métrica euclídea de $\mathbb{R}$ a X.

Sea $E = (a, b) \subseteq X$: entonces, dentro del espacio métrico (X, d_X) se tiene que $E = E^0 = E'$ y vale que E es abierto y cerrado. Además, E es acotado (de hecho todo el espacio métrico X es acotado). △

Ejemplo 3.17. Consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica euclídea. Sea $Y = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ (solo como conjunto) y sea $f : Y \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1)$. Entonces f es una función (bien definida e) inyectiva. Como hemos visto en el Ejemplo 3.5, la función $d_f : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d_f(x, y) = d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \quad \text{con} \quad x, \, y \in (0, 1)$$

es una métrica en Y. Consideramos $E = (0, 1/2] \subseteq Y$: entonces, en el espacio métrico (Y, d_f) se tiene que $E' = E$, $E^o = (0, 1/2)$. De esta forma, E es cerrado, no es abierto y E no es acotado. △

Los ejemplos anteriores muestran que las propiedades de los conjuntos dependen fuertemente del espacio métrico que estemos considerando. En este sentido, siempre hay que tener bien claro el contexto (el EM: tanto la métrica como el conjunto subyacente) en donde se están considerando las propiedades de los conjuntos.

Teorema 3.18. *Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$. Entonces E es abierto si y solo si $X \setminus E$ es cerrado.*

Demostración. Supongamos que E es abierto y sea $x \in (X \setminus E)'$: si suponemos que $x \notin X \setminus E$ entonces $x \in E$ y existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq E$. En este caso, $B_r(x) \cap (X \setminus E) \subseteq E \cap (X \setminus E) = \emptyset$. Este último hecho, junto con la Proposición 3.13, contradicen la hipótesis de que $x \in (X \setminus E)'$. Así, $x \in X \setminus E$ y luego $(X \setminus E)' \subseteq X \setminus E$ con lo que $X \setminus E$ es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $X \setminus E$ es cerrado. Sea $x \in E$: entonces $x \notin (X \setminus E)'$ (de otra forma, $x \in (X \setminus E)' \subseteq X \setminus E$). En particular, existe $r > 0$ tal que $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap (X \setminus E) = \emptyset$ y luego $B_r(x) \setminus \{x\} \subseteq E$. Como $x \in E$, entonces $B_r(x) \subseteq E$ y $x \in E^o$. Así, $E \subseteq E^o$ y luego $E = E^o$ es abierto. ■

Corolario 3.19. *Sea (X, d) un EM y sea $F \subseteq X$. Entonces F es cerrado si y solo si $X \setminus F$ es abierto.*

Demostración. Ejercicio □.

Sea (X, d) un EM. En general, la clase de todos los subconjuntos abiertos en X juega un papel muy importante en los argumentos relacionados con convergencia, límites y continuidad. En el siguiente resultado vamos a estudiar algunas de las propiedades que tiene esta clase de subconjuntos.

Teorema 3.20. *Sea (X, d) un EM. Entonces se verifica que:*

1. *Si $U_\alpha \subseteq X$ es abierto para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq X$ es abierto.*
2. *Si $F_\alpha \subseteq X$ es cerrado para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subseteq X$ es cerrado.*
3. *Si $U_j \subseteq X$ es abierto para $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\bigcap_{j=1}^{n} U_j$ es abierto.*
4. *Si $F_j \subseteq X$ es cerrado para $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ es cerrado.*

Demostración. Para ver 1. sea

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x \in X : \ \exists \alpha \in A \ , \ x \in U_\alpha\} \subseteq X \, .$$

Si $x \in U$ existe $\mu \in A$ tal que $x \in U_\mu$; como U_μ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U_\mu$. En este caso, $B_r(x) \subseteq U_\mu \subseteq U$, por definición de U. Así, $B_r(x) \subseteq U$ y $x \in U^o$. Lo anterior muestra que $U \subseteq U^o$ y luego que $U = U^o$ de forma que U es abierto.

Para verificar 2., notemos que si

$$F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \implies X \setminus F = \bigcup_{\alpha \in A} X \setminus F_\alpha \, ,$$

donde hemos usado una identidad de complementos de conjuntos (ley de De Morgan) de álgebra I. Como cada $X \setminus F_\alpha$ es un conjunto abierto (por el Teorema 3.18), la primera parte de la prueba muestra que $X \setminus F$ es abierto. Finalmente, el Corolario 3.19 muestra que F es cerrado.

Para verificar 3., sea $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$. Si $x \in U$ entonces $x \in U_j$, para $1 \leq j \leq n$. En este caso, existen $r_j > 0$ de forma que $B_{r_j}(x) \subseteq U_j$, para $1 \leq j \leq n$ (porque cada U_j es abierto). Sea $r = \min\{r_j : \ 1 \leq j \leq n\} > 0$ (notar que el mínimo está bien definido y es positivo). En este caso, como $0 < r \leq r_j$ entonces $B_r(x) \subseteq B_{r_j}(x) \subseteq U_j$, $1 \leq j \leq n$. Lo anterior muestra que $B_r(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_j = U$, de forma que $x \in U^o$. Así, $U \subseteq U^o$ y U es abierto.

La prueba del ítem 4. sigue una estrategia de reducción al ítem anterior, como en la prueba del ítem 2 (□). ■

Ejemplos 3.21. En los ítems 3 y 4 del teorema anterior, la hipótesis de que se consideran *finitos* conjuntos (abiertos o cerrados) es esencial. En efecto, consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y los siguientes casos:

1. Sea $U_n = (-1/n, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Esta sucesión de conjuntos abiertos verifica que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$$
que no es abierto.

2. Sea $F_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Esta sucesión de conjuntos cerrados verifica que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = (-1, 1)$$
que no es cerrado.

△

Obs 3.22. Sea (X, d) un EM. Consideramos la *topología inducida por* d, notada τ_d, que es el conjunto
$$\tau_d = \{U \subseteq X : \ U \text{ es conjunto abierto } \}.$$
La topología τ_d verifica las siguientes propiedades:

T1. $X, \emptyset \in \tau_d$.

T2. Si $U_\alpha \in \tau_d$ para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau_d$.

T3. Si $U_j \in \tau_d$ para todo $1 \le j \le n$, entonces $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau_d$.

Observemos que las propiedades [T2] y [T3] son una consecuencia del Teorema 3.20. △

Un mismo conjunto puede tener varias métricas definidas en él; de forma similar, un mismo conjunto puede tener varias topologías definidas en él (que pueden coincidir o no). En lo que sigue mencionamos brevemente algunas de las formas en las que es posible comparar métricas (y sus respectivas topologías).

Definición 3.23. Sea X un conjunto y sean d_1, $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ dos métricas en X. Decimos que

1. las métricas son débilmente equivalentes si $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

2. las métricas son fuertemente equivalentes si existen constantes positivas α, $\beta > 0$ tales que
$$\alpha\, d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta\, d_1(x, y) \quad \text{para todos} \quad x, y \in X\,.$$

△

Obs 3.24. Sea X un conjunto. Entonces la relación de equivalencia débil (respectivamente fuerte) es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las métricas definidas en X (□). △

Proposición 3.25. *Sea X un conjunto y sean d_1, $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ dos métricas en X. Si d_1 y d_2 son fuertemente equivalentes, entonces son débilmente equivalentes (i.e. $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$).*

Demostración. Por hipótesis existen α, $\beta > 0$ tales que

$$\alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y) \quad \text{para todos} \quad x,\, y \in X\,.$$

Veamos que en este caso $\tau_{d_2} \subseteq \tau_{d_1}$. En efecto, sea $U \in \tau_{d_2}$ y sea $x \in U$: por hipótesis, existe $r > 0$ tal que

$$B_r^{d_2}(x) = \{y \in X :\ d_2(x,y) < r\} \subseteq U\,.$$

Usando las desigualdades entre las métricas, notemos que si $d_1(x,y) < \dfrac{r}{\beta}$ entonces $d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y) < \beta\dfrac{r}{\beta} = r$. Entonces $B_{\frac{r}{\beta}}^{d_1}(x) \subseteq B_r^{d_2}(x) \subseteq U$, lo que muestra que para todo $x \in U$ existe $s > 0$ tal que $B_s^{d_1}(x) \subseteq U$. Así, U es abierto en el EM (X, d_1) y $U \in \tau_{d_1}$.

La prueba de la inclusión $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$ es análoga y se deja como ejercicio (□) (notar, por ejemplo, que vale que $d_1(x,y) \leq \dfrac{1}{\alpha}\, d_2(x,y)$, para $x, y \in X$; en este caso podemos repetir el argumento anterior cambiando los roles de d_1 y d_2).

■

Ejemplos 3.26. Consideremos:

1. En $\mathbb{R}^n$ las métricas inducidas por las normas euclídea, y las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son fuertemente equivalentes (entre sí).
2. Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = |1/x - 1/y|$ y $d_2(x,y) = |x - y|$ son débilmente equivalentes, pero no son fuertemente equivalentes.
3. Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = 1$ si $x \neq y$ y $d_1(x,y) = 0$ si $x = y$ (métrica discreta) y $d_2(x,y) = |x - y|$ no son débilmente equivalentes.

Las afirmaciones anteriores son ejercicios □. △

Definición 3.27. Sea (X, d) un EM y $E \subseteq X$. Definimos

1. la clausura de E, notada $\overline{E}$, dada por $\overline{E} = E \cup E'$.
2. el borde E, notado ∂E, dado por $\partial E = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$.

△

Obs 3.28. Sea (X, d) un EM. Para cualquier subconjunto $E \subseteq X$ se tiene que $E \subseteq \overline{E}$ por la definición de clausura. En efecto: $E \subseteq E \cup E' = \overline{E}$. △

Proposición 3.29. *Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$. Dado $x \in X$ entonces $x \in \overline{E}$ si y solo si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.*

Demostración. Ejercicio □.

Teorema 3.30. *Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$. Se verifica que*

1. *$\overline{E}$ es cerrado.*
2. *Si $E \subseteq F$ y F es cerrado entonces $\overline{E} \subseteq F$.*
3. *E es cerrado si y solo si $E = \overline{E}$.*

Demostración. Para ver 1. sea $x \in X \setminus \overline{E}$. Por la Proposición 3.29 existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap E = \emptyset$. Como $B_r(x)$ es conjunto abierto, dado $y \in B_r(x)$ existe $s > 0$ tal que $B_s(y) \subseteq B_r(x)$; en este caso, $B_s(y) \cap E \subseteq B_r(x) \cap E = \emptyset$, de forma que $y \in X \setminus \overline{E}$ (otra vez por la Proposición 3.29). En resumen, $B_r(x) \subseteq X \setminus \overline{E}$ y $X \setminus \overline{E}$ es abierto y luego $\overline{E}$ es cerrado.

Para ver 2. sea F cerrado tal que $E \subseteq F$. Si $x \in E'$ entonces para todo $r > 0$ vale que $\emptyset \neq (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \subseteq (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap F$, que muestra que $x \in F' \subseteq F$ (donde la última inclusión vale porque F es cerrado). Entonces $E' \subseteq F$ y $\overline{E} = E \cup E' \subseteq F$.

Para ver 3., notemos que si E es cerrado, entonces $E' \subseteq E$ y luego $\overline{E} = E' \cup E \subseteq E$. Como $E \subseteq \overline{E}$ vale siempre, vemos que $E = \overline{E}$. Recíprocamente, si $E = \overline{E}$ entonces por el ítem 1 vemos que E es cerrado. ■

Con la notación del resultado anterior, los ítems 1. y 2. muestran que $\overline{E}$ es el cerrado más chico (con respecto al orden de la inclusión) que contiene a E.

Obs 3.31. Sea X un conjunto

1. Si (X, d) es un EM, $E \subseteq X$ entonces se verifica:

$$E^o = \bigcup_{A \in \tau_d \,,\, A \subseteq E} A \quad \text{y} \quad \overline{E} = \bigcap \{F \subseteq X : \ F \text{ es cerrado y } E \subseteq F\} .$$

2. Si d_1 y d_2 son dos métricas débilmente equivalentes en X entonces $\overline{E}^{d_1} = \overline{E}^{d_2}$. En efecto, notemos que como $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ entonces $F \subseteq X$ es cerrado con respecto a d_1 si y solo si $X \setminus F \in \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ si y solo si F es cerrado con respecto a d_2. Entonces se puede usar el ítem 1. para concluir la igualdad de clausuras. De forma similar, en este caso se tiene que el interior de E con respecto a d_1 y con respecto a d_2 coinciden.

Las afirmaciones anteriores son ejercicios □. △

Teorema 3.32. *Consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica (euclídea) usual. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $E \neq \emptyset$ y está acotado superiormente entonces $\alpha = \sup E \in \overline{E}$. En particular, si E es cerrado vale que $\alpha \in E$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in E$; como $E \subseteq \overline{E}$ entonces $\alpha \in \overline{E}$. Por otro lado, supongamos $\alpha \notin E$: si $r > 0$ notemos que $B_r(\alpha) = (\alpha - r, \alpha + r) \subseteq \mathbb{R}$; como α es la mínima cota superior de E y $\alpha - r < \alpha$ entonces existe $e \in E$ tal que $\alpha - r < e$; pero además, $e < \alpha$ (porque α es cota superior y $\alpha \notin E$). Así, $\alpha - r < e < \alpha$ garantiza que $e \in (B_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap E \neq \emptyset$. Lo anterior muestra que $\alpha \in E' \subseteq \overline{E}$. ■

Obs 3.33. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. En este caso, existe $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ (Ver Proposición 2.16). Más aún, por el Teorema anterior hemos verificado que $\sup A \in \overline{A}$. De forma similar, se verifica que $\inf A \in \overline{A}$ (□). △

Obs 3.34. Sea (X, d) un EM y sea $Y \subseteq X$. Entonces podemos considerar el subespacio métrico (Y, d_Y), definido en la Observación 3.2. Si $E \subseteq Y$ entonces podemos considerar las nociones de interior, punto límite y clausura de E tanto con respecto al espacio métrico (X, d) como con respecto a (Y, d_Y) y en general, estas nociones no coinciden (re-interpretar el Ejemplo 3.16 en estos términos).

En general, cuando nos referimos a propiedades de E con respecto al subespacio métrico (Y, d_Y), las indicamos como propiedades de E *relativas* a Y. Por ejemplo, podemos calcular el interior de E relativo a Y; cuando Y está sobre-entendido, entonces solo decimos el interior relativo de E (y expresiones similares cuando queremos indicar la clausura relativa de E, los puntos límites relativos de E, etc.).

En muchos casos nos interesa saber si E es abierto (o cerrado) relativo en Y: por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}$ como espacio métrico (con la métrica usual) e $Y = [0,1]$, entonces $E = [0,1/2) \subseteq Y$ es un abierto relativo en Y (pero claramente, E no es abierto en $\mathbb{R}$). Si consideramos $Z = (0,1)$ entonces $F = [1/2,1)$ es un cerrado relativo a Z (pero no es cerrado en $\mathbb{R}$). Ejercicios □. △

Teorema 3.35. *Sea (X,d) un EM, sea $Y \subseteq X$ y consideremos el subespacio métrico (Y,d_Y). Si $E \subseteq Y$ entonces E es abierto relativo (en Y) si y solo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $E = Y \cap U$.*

Demostración. Supongamos que E es un abierto relativo en Y: entonces, dado $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que la bola en Y

$$B^Y_{r_x}(x) = \{y \in Y : \ d_Y(x,y) = d(x,y) < r_x\} \subseteq E\,.$$

Pero entonces, se verifica (□) que

$$\bigcup_{x\in E} B^Y_{r_x}(x) = E\,.$$

Usando el centro y el radio anterior, podemos construir bolas abiertas en X dadas por $B_{r_x}(x) = \{y \in X : \ d(x,y) < r_x\}$ y el conjunto

$$U := \bigcup_{x\in E} B_{r_x}(x) \subseteq X\,.$$

Notemos que el Teorema 3.20 muestra que U es abierto en X. Además, usando la propiedad distributiva (de conjuntos)

$$U \cap Y = \left(\bigcup_{x\in E} B_{r_x}(x)\right) \cap Y = \bigcup_{x\in E} (B_{r_x}(x) \cap Y) = \bigcup_{x\in E} B^Y_{r_x}(x) = E$$

donde usamos que $B_{r_x}(x) \cap Y = B^Y_{r_x}(x)$ que es una identidad de conjunto sencilla de verificar (□).

Recíprocamente, supongamos que existe U abierto en X tal que $E = Y \cap U$. Si $x \in E = Y \cap U$ entonces existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) = \{y \in X : \ d(x,y) < r_x\} \subseteq U$; pero entonces

$$B^Y_{r_x}(x) = B_{r_x}(x) \cap Y \subseteq U \cap Y = E$$

que muestra que E es un abierto relativo en Y. ■

Corolario 3.36. *Sea (X,d) un EM, sea $Y \subseteq X$ y consideremos el subespacio métrico (Y,d_Y). Si $E \subseteq Y$ entonces E es cerrado relativo (en Y) si y solo si existe $F \subseteq X$ cerrado tal que $E = Y \cap F$.*

Demostración. Notemos que E es cerrado relativo en Y si y solo si $Y \setminus E$ es abierto relativo en Y. Por el resultado anterior, $Y \setminus E$ es abierto relativo en Y si y solo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $Y \setminus E = Y \cap U$: pero

$$Y \setminus E = Y \cap U \Leftrightarrow E = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F$$

donde $F = X \setminus U$ es cerrado en X (notemos que de la misma forma $U = X \setminus F$). Los detalles faltantes del argumento quedan como ejercicio □. □

Corolario 3.37. *Sea (X,d) un EM, sea $Y \subseteq X$ y sea $E \subseteq Y$.*

1. *Si Y es abierto entonces E es abierto relativo en Y si y solo si E es abierto en X.*
2. *Si Y es cerrado entonces E es cerrado relativo en Y si y solo si E es cerrado en X.*

Demostración. Ejercicio (□). Recordar las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados. □

3.2 Conjuntos compactos en espacios métricos

En el estudio de las propiedades de las funciones continuas realizado en análisis I y II, se puede ver el papel fundamental que juegan los intervalos cerrados y acotados en la recta, y más generalmente los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ con la estructura de espacio métrico usual. Por ejemplo, las funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ alcanzan sus valores máximos y mínimos (y en particular, sus valores están acotados) y además verifican propiedades más fuertes que la continuidad (continuidad uniforme) que garantizan, entre otras cosas, que son integrables en el sentido de Riemann. Estos hechos (que hemos aceptado sin demostración) son esenciales para poder desarrollar la teoría.

Una pregunta natural es: ¿cuáles son las propiedades de los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ que están detrás de todos estos hechos? En lo que sigue, vamos a desarrollar una serie de nociones que modelan las propiedades de estos conjuntos (en el contexto general de espacios métricos). Más aún, más adelante vamos a dar pruebas formales y detalladas de todos los hechos que hemos aceptado en Análisis I y II mencionados previamente.

Definición 3.38. Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$.

1. Un cubrimiento de E por abiertos (en X) es una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $U_i \subseteq X$ es abierto para todo $i \in I$ (aquí I denota un conjunto de índices), de forma que
$$E \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i = \{x \in X : \ \exists i \in I \ , \ x \in U_i\} .$$

2. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de E por abiertos. Un subcubrimiento finito de E (del cubrimiento anterior) es una subfamilia $\{U_i\}_{i\in J}$ donde $J \subseteq I$ es un subconjunto finito tal que $E \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

△

La siguiente noción modela la propiedad fundamental de los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.39. Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$. Decimos que K es compacto (en (X, d)) si todo cubrimiento de K por abiertos tiene un subcubrimiento finito (de K). △

Ejemplos 3.40. Consideramos los siguientes ejemplos elementales (□):

1. Si (X, d) es un EM y $K \subseteq X$ es conjunto finito, entonces K es compacto.

2. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual y sea $E = (0, 1)$. Notemos que si $U_n = (1/n, 1)$, para $n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es un cubrimiento de E por abiertos. Notar que este cubrimiento no admite subcubrimientos finitos de E por lo que E no es compacto.

△

Obs 3.41. Sea (X, d) un EM, $Y \subseteq X$ y $K \subseteq Y$. Decimos que K es compacto relativo en Y si K es compacto en el subespacio métrico (Y, d_Y). △

Teorema 3.42. *Sea (X, d) un EM, $Y \subseteq X$ y $K \subseteq Y$. Entonces K es compacto relativo en Y si y solo si K es compacto (en (X, d)).*

Demostración. Supongamos que K es compacto (en (X,d)) y sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de K por abiertos relativos de Y (es decir, $V_i \subseteq Y$ es abierto en el subespacio métrico (Y, d_Y) para todo $i \in I$). Por el Teorema 3.35, para cada $i \in I$ existe $U_i \subseteq X$ abierto, tal que $V_i = Y \cap U_i$. Notemos que por hipótesis,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i\,.$$

Como K es compacto en (X,d), existe $J \subseteq I$ subconjunto finito tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$; como $K \subseteq Y$ se tiene que

$$K \subseteq \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) \cap Y = \bigcup_{i\in J}(U_i \cap Y) = \bigcup_{i\in J} V_i$$

de forma que $\{V_i\}_{i\in J}$ es un subcubrimiento finito de K del cubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$. Así, K es compacto relativo (es decir, en (Y, d_Y)).

Recíprocamente, supongamos que K es compacto relativo en Y. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de K por abiertos de X. Entonces $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Si definimos $V_i = U_i \cap Y$, se tiene que $V_i \subseteq Y$ es abierto relativo en Y para cada $i \in I$. Más aún, como $K \subseteq Y$

$$K \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap Y) = \bigcup_{i\in I} V_i\,.$$

Así, $\{V_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de K por abiertos relativos en Y. Por hipótesis, existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i$. Entonces

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

porque $V_i \subseteq U_i$, para $i \in J$. Lo anterior muestra que K es compacto en (X,d). ■

Obs 3.43. Sea (X,d) un EM y sea $K \subseteq X$. El resultado anterior muestra que K es compacto en X si y solo si K es compacto en el subespacio métrico (K, d_K). Es decir, para estudiar la compacidad de K podemos restringir la métrica a K y olvidarnos del ambiente (pero ojo: ¡no nos podemos olvidar de la métrica!). △

Teorema 3.44. *Sea (X,d) un EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces K es cerrado.*

Demostración. Vamos a ver que $X \setminus K$ es abierto: sea $x \in X \setminus K$ fijo. Para cada $y \in K$, $x \neq y$ (de forma que $d(x,y) > 0$) consideramos $U_y = B_{d(x,y)/2}(y)$. Notemos que $\{U_y\}_{y\in K}$ (aquí usamos a K como conjunto de índices) es un cubrimiento de K por abiertos (cada $y \in K$ está en el U_y correspondiente). Como K es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_y\}_{y\in J}$, donde $J \subseteq K$ es un conjunto finito: digamos que $J = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq K$. Así, $U_{y_j} = B_{d(x,y_j)/2}(y_j)$, para $1 \leq j \leq n$ y se tiene que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j} = \bigcup_{j=1}^{n} B_{d(x,y_j)/2}(y_j)\,.$$

Sea $t = \min\{d(x,y_j)/2 :\ 1 \leq j \leq n\} > 0$; notemos que si $1 \leq j \leq n$ entonces

$$B_t(x) \cap B_{d(x,y_j)/2}(y_j) = \emptyset\,.$$

De otra forma, existe $z \in X$ tal que $d(x,z) < t$ y $d(y_j,z) < d(x,y_j)/2$ con lo cual

$$d(x,y_j) \leq d(x,z) + d(z,y_j) < t + d(x,y_j)/2 \leq d(x,y_j)/2 + d(x,y_j)/2 = d(x,y_j)$$

que es una contradicción. Entonces

$$B_t(x) \cap K \subseteq B_t(x) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_{d(x,y_j)/2}(y_j) \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (B_t(x) \cap B_{d(x,y_j)/2}(y_j)) = \emptyset\,.$$

Lo anterior muestra que $B_t(x) \subseteq X \setminus K$, con $t > 0$. Así, cada punto de $X \setminus K$ es interior a este conjunto, lo que dice que $X \setminus K$ es conjunto abierto; es decir, K resulta cerrado. ■

Proposición 3.45. *Sea (X,d) un EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces K es acotado.*

Demostración. Consideramos el cubrimiento de K por abiertos $\{B_1(x)\}_{x\in K}$. Como K es compacto, existen finitos $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq K$ tal que $\{B_1(x_j)\}_{j=1}^n$ cubre a K, es decir,

$$K \subseteq U := \bigcup_{j=1}^{n} B_1(x_j).$$

Sea

$$r = 1 + \max_{1\leq j\leq n} d(x_1,x_j).$$

Notar que el máximo de esta colección finita de números reales está bien definido. Entonces, para $y \in B_1(x_j)$,

$$d(x_1,y) \leq d(x_1,x_j) + d(x_j,y) \leq d(x_1,x_j) + 1 \leq r,$$

por lo tanto, $K \subseteq B_r(x_1)$. Esto muestra que K es un conjunto acotado. ■

Obs 3.46. Sea (X,d) un EM y sea K compacto. Hemos probado que K resulta ser cerrado y acotado.

Pero ojo: en un espacio métrico (X,d) general, el hecho de que $F \subseteq X$ sea cerrado y acotado ¡no alcanza para garantizar que F sea compacto! Los ejemplos de este hecho requieren cierta elaboración que dejamos para más adelante. △

Teorema 3.47. *Sea (X,d) un EM, sea $K \subseteq X$ compacto y sea $F \subseteq K$ cerrado (que equivale a que $F \subseteq K$ es cerrado relativo). Entonces F es compacto.*

Demostración. A modo de observación, notemos que como K es compacto entonces resulta cerrado. Así, si $F \subseteq K$ vale que F es cerrado si y solo si F es cerrado relativo en K por el Corolario 3.37. De forma similar, F será compacto (en (X,d)) si y solo si F es compacto relativo en K, por el Teorema 3.42.

Por hipótesis $F \subseteq K$ es cerrado en X. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de F por abiertos de X. Entonces consideramos la familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$: notemos que esta familia cubre todo X (□). En particular, esta familia es un cubrimiento de K por abiertos; como K es compacto existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $\{U_i\}_{i\in J} \cup \{X \setminus F\}$ cubre a K es decir,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \cup (X \setminus F)\,.$$

Como $F \subseteq K$ se tiene que

$$F = F \cap K \subseteq F \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \cup (X \setminus F) \right) = \bigcup_{i\in J} (F \cap U_i) \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

donde hemos usado la propiedad distributiva y el hecho de que $F \cap (X \setminus F) = \emptyset$. Lo anterior muestra que $\{U_i\}_{i\in J}$ es un subcubrimiento finito de F (del cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$). Así, F resulta compacto. ■

Corolario 3.48. *Sea (X,d) un EM, $K \subseteq X$ compacto y $F \subseteq X$ cerrado. Entonces $K \cap F \subseteq X$ es compacto.*

Demostración. Como K es compacto entonces es cerrado. Así, $F \cap K \subseteq X$ es cerrado por el Teorema 3.20. Además, es claro que $F \cap K \subseteq K$. Así, por el resultado anterior, $F \cap K$ es compacto en X. ■

Teorema 3.49 (Propiedad de intersección finita (pif))**.** *Sea (X,d) un EM, sea $A \neq \emptyset$ y sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de conjuntos compactos en (X,d) tal que para todo subconjunto finito y no vacío $J \subseteq A$*

$$\bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha \neq \emptyset\,.$$

Entonces $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. Si $A = \{\alpha_0\}$ es un conjunto unitario, el enunciado es claramente cierto. Supongamos que $\alpha_0 \in A$ y tal que $A \setminus \{\alpha_0\} \neq \emptyset$. Supongamos que $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha = \emptyset$ (y llegamos a una contradicción). Entonces, (por las leyes de De Morgan)

$$\bigcup_{\alpha\in A} X \setminus K_\alpha = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha\right) = X\,.$$

Entonces

$$K_{\alpha_0} = K_{\alpha_0} \cap X = K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcup_{\alpha\in A} X \setminus K_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}} (X \setminus K_\alpha) \cap K_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}} (X \setminus K_\alpha)$$

donde hemos usando que $(X \setminus K_{\alpha_0}) \cap K_{\alpha_0} = \emptyset$. Así, $\{(X \setminus K_\alpha)\}_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto K_{α_0}. Sea $J \subseteq A \setminus \{\alpha_0\}$ conjunto finito tal que

$$K_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} (X \setminus K_\alpha)\,.$$

Notemos que en este caso

$$\emptyset = K_{\alpha_0} \cap (X \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in J} (X \setminus K_\alpha)\right) = K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in (J\cup\{\alpha_0\})} K_\alpha$$

que contradice la hipótesis porque $J \cup \{\alpha_0\} \subseteq A$ finito y no vacío. ■

Corolario 3.50. *Sea (X,d) un EM y sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $K_n \subseteq X$ es compacto $K_n \neq \emptyset$, y tal que $K_{n+1} \subseteq K_n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset$.

Demostración. Notemos que de la hipótesis $K_{n+1} \subseteq K_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$ (encaje) se deduce que si $m \geq n$ entonces $K_m \subseteq K_n$.

Veamos que esta sucesión (familia indicada por $\mathbb{N}^*$) de compactos verifica la pif: sea $J \subseteq \mathbb{N}^*$ subconjunto finito y no vacío. En este caso, está bien definido $m = \max J \in \mathbb{N}^*$: entonces para cada $n \in J$ se tiene que $m \geq n$ y luego $K_m \subseteq K_n$. En particular,

$$\emptyset \neq K_m \subseteq \bigcap_{n\in J} K_n \implies \bigcap_{n\in J} K_n \neq \emptyset\,.$$

Entonces podemos aplicar el resultado anterior y concluir que la intersección de la familia completa es no vacía, es decir: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset$. ■

Teorema 3.51. *Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Si $E \subseteq K$ es conjunto infinito entonces $K \cap E' \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponemos que $K \cap E' = \emptyset$ (y llegamos a una contradicción). Así, si $x \in K$ entonces ($x \notin E'$ y) existe $r_x > 0$ tal que $(B_{r_x}(x) \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$ de forma que $B_{r_x}(x) \cap E$ tiene a lo más un punto. De esta forma, construimos $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in K}$ que es cubrimiento de K por abiertos. Como K es compacto existe un conjunto finito $J \subseteq K$ tal que $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in J}$ cubre a K. En este caso,

$$E = E \cap K \subseteq E \cap \left(\bigcup_{x \in J} B_{r_x}(x) \right) = \bigcup_{x \in J} B_{r_x}(x) \cap E \, .$$

Pero por cada $x \in J$ existe a lo sumo un $e_x \in E$ tal que $e_x \in B_{r_x}(x)$ (por construcción); es decir, cada $B_{r_x}(x) \cap E$ tiene a lo sumo un elemento, para $x \in J$. Esto muestra que E tiene una cantidad de elementos menor o igual que la cantidad de elementos de J. Esto contradice nuestra hipótesis de que E era conjunto infinito. ■

Cabe remarcar que el resultado anterior de alguna manera *fuerza* la existencia de puntos límites de cada subconjunto infinito $E \subseteq K$ de un conjunto compacto K (y además muestra que estos puntos límites deben estar en el compacto: pero esto último ya lo sabíamos, porque $E \subseteq K$ implica que $E' \subseteq \overline{E} \subseteq K$, porque K es cerrado).

Ejemplo 3.52. Consideremos nuevamente el Ejemplo 3.7. Consideramos

$$D = \{ f \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : \ \|f\|_\infty \leq 1 \} \, .$$

Es claro que $D \subseteq \ell_\infty(\mathbb{R})$ es un conjunto acotado en el espacio métrico $\ell_\infty(\mathbb{R})$ con la métrica inducida por $\| \cdot \|_\infty$. Además, es un conjunto cerrado (□). Consideramos

$$E = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \ / \ f(n) \in \{0, 1\} \in D \ , \ n \in \mathbb{N}^* \} \subseteq D \, .$$

Hemos visto que E es un conjunto no numerable (usando el argumento diagonal de Cantor; ver Ejemplo 2.36 item 3.). Notemos además que si $f, g \in E$ son tales que $f \neq g$ entonces $d(f, g) = \|f - g\|_\infty = 1$ (□). En este caso decimos que E es un conjunto *separado* con constante de separación 1 (en general decimos que un conjunto E es separado si existe algún $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$, para todo $x, y \in E$ con $x \neq y$ y $\delta > 0$ es una constante de separación).

El hecho de que E sea separado implica que $E' = \emptyset$: en efecto, notemos que si $h \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ entonces $B_{1/2}(h) = \{k \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : \ \|h - k\|_\infty < 1/2\}$ puede contener a lo sumo un elemento de E, porque si $f, g \in E$ son tales que $\|h - f\|_\infty < 1/2$, $\|h - g\|_\infty < 1/2$ tendríamos que $\|f - g\|_\infty < 1$ (por desigualdad triangular, pasando por h) en contra del hecho de que E está separado con constante de separación 1.

Lo anterior muestra que $E' \cap D = \emptyset$ lo cual muestra que D no es compacto, por el Teorema 3.51. Así, vemos que en general ser cerrado y acotado en un espacio métrico no implica ser compacto. △

En lo que sigue vamos a desarrollar una serie de resultados con el objetivo de probar que los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual (es decir, la métrica euclídea) son compactos.

Teorema 3.53. *Sea $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de intervalos cerrados, acotados y no vacíos en $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) tal que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Notemos que $I_n = [a_n, b_n]$, con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (aquí la expresión *intervalo cerrado* corresponde al hecho de que es un intervalo, que como conjunto, es cerrado en $\mathbb{R}$ con la métrica usual). Como $I_{n+1} \subseteq I_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$ entonces, si $n \leq m$ vale que $I_m \subseteq I_n$, lo que muestra que $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$, para $n \leq m \in \mathbb{N}^*$. Así, si $E = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}$ entonces $E \neq \emptyset$ y E está acotado superiormente; de hecho b_n es cota superior, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Sea $x = \sup E \in \mathbb{R}$: entonces $a_n \leq x$, $n \in \mathbb{N}^*$ (porque x es cota superior de E) y $x \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (porque b_n es cota superior de E y x es la mínima cota superior de E). Así, $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, lo que muestra que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \neq \emptyset$. ■

Definición 3.54. Sea $k \in \mathbb{N}^*$. Una k-celda cerrada es un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}^k$ para el cual existen a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, para $1 \leq i \leq k$ tales que

$$I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ , \ 1 \leq i \leq k\} .$$

△

Notemos que si $I \subseteq \mathbb{R}^k$ es una k-celda cerrada, entonces I es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual (□).

Teorema 3.55. *Sea $k \in \mathbb{N}^*$. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de k-celdas cerradas tal que $I_{n+1} \subseteq I_n$, para $n \in \mathbb{N}^*$ (la sucesión está encajada). Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existen $a_{i,n}$, $b_{i,n} \in \mathbb{R}$ tales que $a_{i,n} \leq b_{i,n}$, $1 \leq i \leq k$, de forma que

$$I_n = \prod_{i=1}^{k} [a_{i,n}, b_{i,n}] = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ a_{i,n} \leq x_i \leq b_{i,n} \ , \ 1 \leq i \leq k\} , \quad n \geq 1 .$$

Como $I_{n+1} \subseteq I_n$ concluimos que $a_{i,n} \leq a_{i,n+1} \leq b_{i,n+1} \leq b_{i,n}$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Fijado $1 \leq i \leq k$, se tiene que $\{[a_{i,n}, b_{i,n}]\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de intervalos cerrados, acotados, no vacíos y encajados en $\mathbb{R}$. Por el resultado anterior, existe $x_i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a_{i,n}, b_{i,n}]$ es decir,

$$a_{i,n} \leq x_i \leq b_{i,n} \quad \text{para todos} \quad n \in \mathbb{N}^* \ , \ 1 \leq i \leq k .$$

Así, podemos ver que

$$(x_1, \ldots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} [a_{i,n}, b_{i,n}] = I_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

Finalmente, notemos que lo anterior dice que $(x_1, \ldots, x_k) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \neq \emptyset$. ■

Definición 3.56. Sea $I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^k$ una k-celda cerrada. Definimos el diámetro de I, notado $\operatorname{diam}(I)$,

$$\operatorname{diam}(I) = \sup\{d(x, y) : \ x, \, y \in I\}$$

donde $d(x, y) = \|y - x\|$ denota la distancia euclídea usual.

Obs 3.57. Sea $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica (euclídea) usual; sean a_j, $b_j \in \mathbb{R}$ tales que $a_j \leq b_j$, $1 \leq j \leq k$. Entonces, si

$$I = \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j] = \{(x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k : \ a_j \leq x_j \leq b_j \ , \ 1 \leq j \leq k\}$$

entonces $\operatorname{diam}(I) = (\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2)^{1/2}$ ($\square$). $\triangle$

Teorema 3.58. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}^k$ una k-celda cerrada. Si consideramos a $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual (euclídea) I es conjunto compacto.*

Demostración. Por hipótesis, existen a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$ tales que

$$I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ , \ 1 \leq i \leq k\} .$$

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento de I por abiertos de $\mathbb{R}^k$ (con la métrica usual). Suponemos que este cubrimiento no tiene subcubrimientos finitos de I (y llegamos a un absurdo). Definimos $c_i = (a_i + b_i)/2$ el punto intermedio entre a_i y b_i, $1 \leq i \leq k$; además, definimos

$$J_{i,1} = [a_i, c_i] \subseteq \mathbb{R} \quad \text{y} \quad J_{i,2} = [c_i, b_i] \subseteq \mathbb{R} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq k .$$

Definimos el conjunto de índices $M = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) : \ \varepsilon_j \in \{1, 2\}, 1 \leq j \leq k\}$ que es un conjunto de 2^k elementos. Para cada $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in M$ definimos

$$Q_\varepsilon = \prod_{i=1}^{k} J_{i,\varepsilon_i} = \{(x_1, \ldots, x_k) : \ x_i \in J_{i,\varepsilon_i} \ , \ 1 \leq i \leq k\} .$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = (1, \ldots, 1)$ entonces

$$Q_{(1,\ldots,1)} = \prod_{i=1}^{k} [a_i, c_i] .$$

De esta forma construimos 2^k conjuntos $\{Q_\varepsilon : \ \varepsilon \in M\}$, cada uno de los cuales es una k-celda cerrada; más aún, notemos que

$$\bigcup_{\varepsilon \in M} Q_\varepsilon = I$$

es decir, $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon \in M}$ es un cubrimiento de I ($\square$).

La igualdad anterior dice que cada Q_ε es una k-celda más chica que I; pero podemos afirmar este hecho con un poco más de detalle. En efecto, notemos que

$$\operatorname{diam}(Q_\varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{b_i - a_i}{2} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(I)$$

para cada $\varepsilon \in M$ ($\square$). Notemos que como cada $Q_\varepsilon \subseteq I$, entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de Q_ε por abiertos, para cada $\varepsilon \in M$. Si fuera cierto que para cada $\varepsilon \in M$ hay un subcubrimiento finito $\{U_\alpha\}_{\alpha \in F_\varepsilon}$ (con $F_\varepsilon \subseteq A$ conjunto finito) de Q_ε, entonces notemos que

$$I = \bigcup_{\varepsilon \in M} Q_\varepsilon \subseteq \bigcup_{\varepsilon \in M} \left(\bigcup_{\alpha \in F_\varepsilon} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$$

donde $F = \bigcup_{\varepsilon \in M} F_\varepsilon \subseteq A$ es un conjunto finito (unión finita de conjuntos finitos). Pero este último hecho contradice nuestra hipótesis de que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no tiene subcubrimientos finitos de I. Así, existe algún $\varepsilon \in M$ tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no tiene subcubrimientos finitos de $I_1 := Q_\varepsilon$.

De esta forma, hemos obtenido una k-celda cerrada $I_1 \subseteq I$, tal que $\operatorname{diam}(I_1) = 1/2 \operatorname{diam}(I)$. Además, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de I_1 por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito de I_1. Estamos como cuando empezamos, pero ahora con I_1: podemos repetir el procedimiento anterior y obtener una k-celda cerrada $I_2 \subseteq I_1$ tal que $\operatorname{diam}(I_2) = 1/2 \operatorname{diam}(I_1) = 1/2^2 \operatorname{diam}(I)$, y tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de I_2 por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito de I_2. Y repetimos.

Así, obtenemos una sucesión de k-celdas cerradas $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\operatorname{diam}(I_n) = \dfrac{1}{2^n} \operatorname{diam}(I)$ y tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de I_n por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito de I_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Por el Teorema 3.55 existe $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subseteq I$. En particular, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $z \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subseteq U_{\alpha_0}$. Pero aquí viene el problema: sea $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\operatorname{diam}(I_n) = \dfrac{1}{2^n} < r$; si $y \in I_n$ es arbitrario (recordemos que $z \in I_n$) entonces

$$d(z, y) \leq \operatorname{diam}(I_n) < r \implies I_n \subseteq B_r(z) \subseteq U_{\alpha_0}\,.$$

donde hemos usado la propiedad del diámetro de las celdas comentada antes de este teorema. Pero entonces $\{U_{\alpha_0}\}$ (el U_{α_0} solito) es un subcubrimiento finito de I_n, en contra de la propiedad con la que construimos I_n. Esta contradicción muestra que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ debe tener algún subcubrimiento finito de I. ■

Teorema 3.59. *Consideremos $\mathbb{R}^k$ con su métrica usual (euclídea). Dado $K \subseteq \mathbb{R}^k$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K es cerrado y acotado.*
2. *K es compacto.*
3. *Todo subconjunto infinito $E \subseteq K$ es tal que $E' \cap K \neq \emptyset$.*

Demostración. 1. implica 2. Supongamos que K es cerrado y acotado. Entonces existe $r > 0$ y $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tales que $K \subseteq B_r(x)$. Si $y = (y_1, \ldots, y_k) \in B_r(x)$ entonces

$$|y_i| - |x_i| \leq |y_i - x_i| \leq \|y - x\| < r \implies |y_i| \leq |x_i| + r \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq k\,.$$

Así, si $m = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq k\}$ se ve que si $y \in B_r(x)$ entonces $|y_i| \leq m + r$, $1 \leq i \leq k$. Esto último dice que $B_r(x) \subseteq I$, donde I es la k-celda cerrada

$$I = \prod_{i=1}^{k} [-m - r, m + r]\,.$$

Como I es compacta y $K \subseteq I$ es cerrado, entonces K resulta compacto por el Teorema 3.47.

2. implica 3. Por otro lado, si K es compacto hemos visto que si $E \subseteq K$ es conjunto infinito entonces $E' \cap K \neq \emptyset$ (Teorema 3.51).

Para ver que 3. implica 1. argumentamos por contra-recíproca: suponemos que no vale 1. y vemos que no vale 3. Si no vale 1. entonces o bien K no es cerrado, o bien

K no es acotado. Si K no es cerrado entonces existe $x \in K'$ tal que $x \notin K$. Como consecuencia de la Proposición 3.13 vemos que si $r > 0$ entonces $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap K$ es conjunto infinito (porque sacarle un elemento a un conjunto no cambia que sea infinito). En particular, podemos elegir $x_1 \in (B_1(x) \setminus \{x\}) \cap K$; de forma análoga, podemos elegir $x_2 \in (B_{1/2}(x) \setminus \{x\}) \cap K$ tal que $x_2 \neq x_1$ (porque tenemos infinitos elementos para elegir, y elegimos uno distinto de x_1) Así, para cada $n \in N^*$, $n \geq 2$, podemos elegir $x_n \in (B_{1/n}(x) \setminus \{x\}) \cap K$ tal que $x_n \neq x_i$, para $1 \leq i \leq n-1$. De esta forma construimos el conjunto infinito $E = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq K$. Veamos que $E' \cap K = \emptyset$: en efecto, si $z \in K$ entonces $z \neq x$: entonces $d(x,z) = s > 0$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $0 < 1/n_0 < s/2$. En este caso, $d(z,x) \leq d(z,x_n) + d(x_n,x)$ que muestra que

$$d(z,x_n) \geq d(x,z) - d(x,x_n) > s - 1/n > s/2 \quad \text{para} \quad n \geq n_0 \,.$$

Lo anterior muestra que $B_{s/2}(z) \cap E \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$ es un conjunto finito; de esta forma, $z \notin E'$ y $E' \cap K = \emptyset$.

Por otro lado, si K no es acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe $x_n \in K$ tal que $\|x_n\| \geq n$. Entonces podemos construir $E = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ que es un conjunto infinito ($\square$). Sea $x \in K$ y sea $r = \|x\| \geq 0$. Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $r + 1 < n_0$; así, si $n \geq n_0$ entonces

$$\|x_n - x\| \geq \|x_n\| - \|x\| \geq r + 1 - r = 1 \quad \text{para} \quad n \geq n_0 \,.$$

Lo anterior indica que $B_1(x) \cap E \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$, que es un conjunto finito. Pero entonces $x \notin E'$. Lo anterior muestra que $K \cap E' = \emptyset$ en este caso también. ■

Teorema 3.60 (Weierstrass)**.** *Todo subconjunto acotado e infinito $E \subseteq \mathbb{R}^k$ verifica que $E' \neq \emptyset$.*

Demostración. Si E es acotado hemos visto que podemos encerrarlo en una k-celda cerrada $I \subseteq \mathbb{R}^k$, es decir $E \subseteq I$. Como I es compacta y E es infinito entonces hemos probado que $E' \cap I \neq \emptyset$. Pero esto último indica que $E' \neq \emptyset$. ■

3.3 Conjuntos conexos

Definición 3.61. Sea (X,d) un EM.

1. Decimos que X es disconexo si existen $U, V \subseteq X$ conjuntos abiertos, $U \neq \emptyset \neq V$, tales que
$$U \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cup V = X \,.$$
2. Decimos que X es conexo si X no es disconexo.
3. Dado $Y \subseteq X$ decimos que Y es disconexo en X (respectivamente conexo en X) si el (sub-)espacio métrico (Y, d_Y) es disconexo (respectivamente conexo).

△

Obs 3.62. Sea (X,d) un EM, $Y \subseteq X$. Sean $U, V \subseteq X$ dos conjuntos abiertos tales que

$$U \cap V \cap Y = \emptyset \quad \text{y} \quad Y \subseteq U \cup V \,.$$

Si se verifica que $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$ entonces $Y \subseteq X$ es disconexo. En efecto, si definimos $U_1 = U \cap Y$ y $V_1 = V \cap Y$ entonces $U_1, V_1 \subseteq Y$ son abiertos relativos en Y (es decir, U_1, V_1 son abiertos en el subespacio (Y, d_Y)) por el Teorema 3.35. Por hipótesis, $U_1 \neq \emptyset \neq V_1$ son tales que $U_1 \cap V_1 = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = U \cap V \cap Y = \emptyset$ y

$$Y = Y \cap (U \cup V) = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = U_1 \cup V_1 \,.$$

Lo anterior indica que Y es disconexo.

Recíprocamente, si Y es disconexo, existen U_1, $V_1 \subseteq Y$ abiertos relativos en Y tales que $U_1 \neq \emptyset \neq V_1$, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ y $U_1 \cup V_1 = Y$. Por el Teorema 3.35 existen U, $V \subseteq X$ tales que $U_1 = U \cap Y$ y $V_1 = V \cap Y$. En este caso es sencillo verificar que $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, $U \cap V \cap Y = \emptyset$ y $Y \subseteq U \cup V$. △

Teorema 3.63. *Consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica (euclídea) usual. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y solo si tiene la siguiente propiedad: si a, $c \in E$ y $b \in \mathbb{R}$ es tal que $a < b < c$ entonces $b \in E$ (es decir, E es convexo).*

Demostración. Supongamos que E no es convexo, es decir que existen a, $c \in E$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$ y $b \notin E$. Entonces podemos definir $U = (-\infty, b)$ y $V = (b, \infty)$ que son dos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $a \in U \cap E \neq \emptyset$, $c \in V \cap E \neq \emptyset$, $U \cap V \cap E = \emptyset$ y (como $b \notin E$) $E \subseteq U \cup V$. Por la Observación 3.62 vemos que $E \subseteq \mathbb{R}$ no es conexo.

Por otro lado, si E no es conexo entonces existen abiertos relativos no vacíos U_1, $V_1 \subseteq E$ tales que $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ y $E = U_1 \cup V_1$. Recordemos que en este caso existen abiertos U, $V \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $U_1 = E \cap U$ y $V_1 = E \cap V$. Tomemos $x \in U_1$, $y \in V_1$ y supongamos (sin pérdida de la generalidad) que $x < y$. Entonces $U_1 \cap [x, y] \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente (por y). Sea $z = \sup(U_1 \cap [x, y]) \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 3.32 vemos que $z \in \overline{U_1 \cap [x, y]} \subseteq \overline{U_1}$, donde la clausura es en $\mathbb{R}$.

Si $z \in V_1$ entonces, como V_1 es abierto relativo existe $r > 0$ tal que $E \cap B_r(z) \subseteq V_1$; pero $\emptyset \neq B_r(z) \cap U_1 = (B_r(z) \cap E) \cap U_1 \subseteq V_1 \cap U_1$, que contradice la hipótesis sobre U_1 y V_1. En resumen: $z \notin V_1$ y en particular $x \leq z < y$. Finalmente, consideramos los siguientes dos casos:

Si $z \in U_1$ entonces $z \notin \overline{V_1}$ (clausura en $\mathbb{R}$): de otra forma, existe $r > 0$ tal que $E \cap B_r(z) \subseteq U_1$ pero entonces $\emptyset \neq B_r(z) \cap V_1 = (B_r(z) \cap E) \cap V_1 \subseteq U_1 \cap V'$ que contradice la hipótesis sobre U_1 y V_1. Luego existe $t > 0$ tal que $B_t(z) = (z - t, z + t)$ es tal que $B_t(z) \cap V_1 = \emptyset$. Lo anterior dice que $x \leq z < z_1 := z + \min\{t/2, (y - z)/2\} < y$; pero entonces $z_1 \notin U_1$ (porque z es cota superior de $U_1 \cap [x, y]$) con $z \in U_1$, $y \in V_1$. Además, $z_1 \notin V_1$, porque $z_1 \in B_t(z)$ y $B_t(z) \cap V' = \emptyset$. Así, $x < z_1 < y$ con $z_1 \notin E$.

Por otro lado, si $z \notin U_1$ (recordemos que $z \notin V_1$), entonces $x < z < y$, con $x \in U_1 \subseteq E$, $y \in V_1 \subseteq E$ y $z \notin E$. En cualquier caso, concluimos que E no es convexo. ■

3.4 Ejercicios del texto

3.1. Dado $a = (a_j)_{j=1}^n$ probar que

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \quad \text{y} \quad \|a\|_\infty = \max\{|a_j| : \ 1 \leq j \leq n\}$$

son dos normas en $\mathbb{R}^n$. Probar que ni $\|\cdot\|_1$ ni $\|\cdot\|_\infty$ provienen de un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (porque no satisfacen la identidad del paralelogramo).

3.2. Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$. Podemos restringir la métrica en X a una métrica en E, es decir, considerar $d_E : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $d_E(x, y) = d(x, y)$, para $x, y \in E$. Probar que d_E es una métrica en E obtenida por restricción de d.

3.3. Demostrar el ejemplo 3.3: Consideremos el cuerpo de números complejos $\mathbb{C}$. En este caso podemos definir la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ (módulo de la diferencia de complejos). Probar que d es una distancia en $\mathbb{C}$ (que es llamada distancia usual en $\mathbb{C}$).

3.4. Demostrar el ejemplo 3.5: Sea (X, d) un EM y sea Y un conjunto. Probar que si $f : Y \to X$ es una función inyectiva entonces $d_f : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d_f(y, y') = d(f(y), f(y')) \quad \text{para} \quad y,\, y' \in Y$$

es una métrica.

3.5. Sean $x = (x_j)_{j=1}^n$, $y = (y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Probar que la función definida por $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 1$, cuando $x \neq y$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$ pero no proviene de una norma.

3.6. Demostrar el ejemplo 3.7: Consideramos

$$\ell_\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} : \ \{|f(n)| : \ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R} \text{ está acotado superiormente } \}.$$

1. Probar que $\ell_\infty(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con la suma y la acción escalar puntual: es decir, dados f, $g \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si definimos

   $$\lambda f + g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad (\lambda f + g)(n) = \lambda f(n) + g(n) \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}^*$$

   probar que $\lambda f + g \in \ell_\infty(\mathbb{R})$.

2. Si $f \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ definimos

   $$\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : \ n \in \mathbb{N}^*\} \geq 0.$$

   Demostrar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\ell_\infty(\mathbb{R})$.

3. Finalmente, definimos $d : \ell_\infty(\mathbb{R}) \times \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Probar que es una métrica.

3.7. Dibujar las bolas $B_1(0)$ en $X = \mathbb{R}^2$ de centro $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y de radio uno, con respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|$ (norma euclídea), $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

3.8. Probar el corolario 3.14: Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$ un conjunto finito. Probar que $E' = \emptyset$ (y en este caso $E = \text{Ais}(E)$).

3.9. Sea $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea. Probar lo siguiente:

1. Si $E = \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ entonces $E^o = \emptyset$, $\text{Ais}(E) = E$ y $E' = \{(0, 0)\}$. E no es abierto ni cerrado; pero E es acotado.

2. Sea $E = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ d(p, (0, 0)) \leq 1\}$. Entonces $E^o = B_1((0, 0))$, $\text{Ais}(E) = \emptyset$, $E' = E$. E es cerrado, no es abierto, y es acotado.

3.10. Probar el corolario 3.19: Sea (X, d) un EM y sea $F \subseteq X$. Probar que F es cerrado si y solo si $X \setminus F$ es abierto.

3.11. Completar la demostración del Teorema 3.20: Sea (X, d) un EM. Probar que si $F_j \subseteq X$ es cerrado para $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ es cerrado.

3.12. Probar la observación 3.24: Sea X un conjunto. Probar que la relación de equivalencia débil (respectivamente fuerte) es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las métricas definidas en X.

3.13. Completar la demostración de la Proposición 3.25: Sea X un conjunto y sean d_1, $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dos métricas en X. Probar que si d_1 y d_2 son fuertemente equivalentes entonces la inclusión $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$ es cierta.

3.14. Probar los siguientes ítems:

1. En $\mathbb{R}^n$ las métricas inducidas por las normas euclídea, y las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son fuertemente equivalentes (entre sí).
2. Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = |1/x - 1/y|$ y $d_2(x,y) = |x-y|$ son débilmente equivalentes, pero no son fuertemente equivalentes.
3. Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = 1$ si $x \neq y$ y $d_1(x,y) = 0$ si $x = y$ (métrica discreta) y $d_2(x,y) = |x-y|$ no son débilmente equivalentes.

3.15. Demostrar la Proposición 3.29: Sea (X,d) un EM y sea $E \subseteq X$. Demostrar que dado $x \in X$ entonces $x \in \overline{E}$ si y solo si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

3.16. Sea X un conjunto. Probar:

1. Si (X,d) es un EM, $E \subseteq X$ entonces se verifica:
$$E^o = \bigcup_{A \in \tau_d\,,\, A \subseteq E} A \quad \text{y} \quad \overline{E} = \bigcap \{F \subseteq X : \ F \text{ es cerrado y } E \subseteq F\}\,.$$
2. Si d_1 y d_2 son dos métricas débilmente equivalentes en X entonces $\overline{E}^{d_1} = \overline{E}^{d_2}$.

3.17. Demostrar la observación 3.33: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. Probar que $\inf A \in \overline{A}$.

3.18. Probar que si consideramos $\mathbb{R}$ como espacio métrico (con la métrica usual) e $Y = [0,1]$, entonces $E = [0,1/2) \subseteq Y$ es un abierto relativo en Y (pero claramente, E no es abierto en $\mathbb{R}$). Por otro lado probar que si consideramos $Z = (0,1)$ entonces $F = [1/2,1)$ es un cerrado relativo a Z (pero no es cerrado en $\mathbb{R}$).

3.19. Completar la demostración del Teorema 3.35: Sea (X,d) un EM, sea $Y \subseteq X$ y consideremos el subespacio métrico (Y, d_Y). Demostrar que si $E \subseteq Y$ entonces E es abierto relativo (en Y) si y solo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $E = Y \cap U$.

3.20. Demostrar el Corolario 3.36: Sea (X,d) un EM, sea $Y \subseteq X$ y consideremos el subespacio métrico (Y, d_Y). Probar que si $E \subseteq Y$ entonces E es cerrado relativo (en Y) si y solo si existe $F \subseteq X$ cerrado tal que $E = Y \cap F$.

3.21. Demostrar el Corolario 3.37: Sea (X,d) un EM, sea $Y \subseteq X$ y sea $E \subseteq Y$. Probar:

1. Si Y es abierto entonces E es abierto relativo en Y si y solo si E es abierto en X.
2. Si Y es cerrado entonces E es cerrado relativo en Y si y solo si E es cerrado en X.

3.22. Demostrar el ejemplo 3.40:

1. Probar que si (X,d) es un EM y $K \subseteq X$ es conjunto finito, entonces K es compacto.
2. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual y sea $E = (0,1)$. Probar que si $U_n = (1/n, 1)$, para $n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es un cubrimiento de E por abiertos. Probar que este cubrimiento no admite subcubrimientos finitos de E.

3.23. Completar la demostración del Teorema 3.47: Sea (X,d) un EM, sea $K \subseteq X$ compacto y sea $F \subseteq K$ cerrado (que equivale a que $F \subseteq K$ es cerrado relativo). Entonces F es compacto.

3.24. Consideramos
$$D = \{f \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : \ \|f\|_\infty \leq 1\}\,.$$

1. Probar que $D \subseteq \ell_\infty(\mathbb{R})$ es un conjunto cerrado y acotado en el espacio métrico $\ell_\infty(\mathbb{R})$ con la métrica inducida por $\|\cdot\|_\infty$.
2. Probar que si $f, g \in E$ son tales que $f \neq g$ entonces $d(f,g) = \|f-g\| = 1$.
3. Probar que D no es compacto.

3.25. Sea $k \in \mathbb{N}^*$. Una k-celda cerrada es un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}^k$ para el cual existen a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, para $1 \leq i \leq k$ tales que

$$I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ , \ 1 \leq i \leq k\}.$$

Probar que si $I \subseteq \mathbb{R}^k$ es una k-celda cerrada, entonces I es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual.

3.26. Demostrar el observación 3.57: Sea $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica (euclídea) usual; sean a_j, $b_j \in \mathbb{R}$ tales que $a_j \leq b_j$, $1 \leq j \leq k$. Probar que si

$$I = \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j] = \{(x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k : \ a_j \leq x_j \leq b_j \ , \ 1 \leq j \leq k\}$$

entonces $\operatorname{diam}(I) = (\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2)^{1/2}$.

3.27. Completar la demostración del Teorema 3.58: Sea $I \subseteq \mathbb{R}^k$ una k-celda cerrada. Si consideramos a $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual (euclídea) probar que I es conjunto compacto.

3.28. Completar la demostración del Teorema 3.59: Consideremos $\mathbb{R}^k$ con la métrica euclídea usual. Dado $K \subseteq \mathbb{R}^k$, probar que si todo subconjunto infinito $E \subseteq K$ es tal que $E' \cap K \neq \emptyset$ entonces K es cerrado y acotado.

3.5 Ejercicios nuevos

3.29. Sean d_1 y d_2 dos métricas en M. Probar que $d_1 + d_2$ y $\max\{d_1, d_2\}$ son métricas en M.

3.30. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Determinar, para cada una de las siguientes funciones, si es una métrica en $\mathbb{R}$ o no.

a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$,

b) $d_2(x,y) = |x-y|^{1/2}$,

c) $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$,

d) $d_4(x,y) = |x - 2y|$,

e) $d_5(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

3.31. Hallar el conjunto de puntos límite y el interior de los siguientes conjuntos:

a) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

d) $D = (0, 3] \times \{2\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

e) $E = (0, \infty) \times (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$.

3.32. Para cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior determinar si son cerrados, abiertos y/o acotados.

3.33. Construir un conjunto acotado de números reales que tenga exactamente tres puntos límite.

3.34. Sea X un conjunto infinito. Para $p, q \in X$, definimos

$$d(p, q) = \begin{cases} 1 & p \neq q \\ 0 & p = q \end{cases}.$$

En el ejercicio 3.5 probamos que es una métrica ¿Qué subconjuntos del espacio X con esta métrica son abiertos, cuáles cerrados y cuáles compactos?

3.35. Considerar (X, d) un EM. Sean A y B subconjuntos de X. Probar que

a) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

d) $A \subseteq B \Rightarrow A^o \subseteq B^o$.

e) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

f) $(A \cup B)^o \supseteq A^o \cup B^o$.

g) $A' = \overline{A}'$

h) $(A')' \subseteq A'$

i) En los ítems c), f) y h), dar ejemplos que muestren que las inclusiones pueden ser propias.

3.36. Considerar (X, d) un EM. Sean $A_i \subseteq X$ para todo $i \in I$. Probar que

a) $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$

b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^o \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^o$

c) En ambos casos, dar ejemplos que muestren que las inclusiones pueden ser propias.

3.37. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Demostrar que si $p \in [0, 1]$ y $r > 0$ entonces $B_r(p) \cap (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ es un conjunto infinito.

3.38. Probar que $\overline{B}_M(x) = \{y \in \mathbb{R}^k : \ d(x, y) \leq M\} \subseteq \mathbb{R}^k$ es cerrado y acotado.

3.39. Consideremos a $\mathbb{Q}$ como un espacio métrico dotado de la métrica $d(p,q) = |p-q|$. Sea E el conjunto de todos los $p \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < p^2 < 3$. Probar que el conjunto E es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}$ pero no es compacto. ¿Es E abierto en $\mathbb{Q}$? Justificar la respuesta.

3.40. Dar un ejemplo de un cubrimiento del intervalo $[a,b)$ que no tenga un subcubrimiento finito.

3.41. Sean $I = [a,b]$ y $J = (a,b)$ intervalos de números reales.

a) Sea Probar que existe una familia $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos reales abiertos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} \subseteq J_n$ y tal que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = I.$$

b) Probar que existe una familia $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos reales cerrados tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ y tal que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = J.$$

3.42. Demostrar que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son compactos entonces $A \times B$ es compacto en $\mathbb{R}^2$.

3.43. Demostrar, por definición, que $K = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ es compacto en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

3.44. En $\mathbb{C}^3$ se define la función

$$\begin{aligned} N : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) &\longrightarrow |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3|. \end{aligned}$$

Observar que esta función N es una norma (no es necesario demostrar que es una norma). Estudiar justificando si el conjunto

$$A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 = \overline{x}_2 + \overline{x}_3\}$$

es compacto en $(\mathbb{C}^3, N)$.

3.45. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la distancia

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \|x\| + \|y\| & x \neq y \end{cases}$$

donde $\|x\|$ denota la norma euclídea $\mathbb{R}^2$ (no es necesario demostrar que es una distancia). Sea

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a-2)^2 + (b-2)^2 < 1\}.$$

Probar que S es abierto y cerrado en $(\mathbb{R}^2, d)$. ¿Es el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ conexo? Justificar.

3.46. Demostrar que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y solo si es un intervalo.

3.47. ¿Es la clausura y el interior de un conjunto conexo también conexo?

Sugerencia: Demostrar que si E es conexo y $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$, entonces F es conexo.

3.48. Probar que todo conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Sugerencia: Probar que dados dos conjuntos separados A y B de $\mathbb{R}^n$ existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $p(t_0) \notin A \cup B$, donde

$$p(t) = (1-t)a + tb, \quad \text{para } t \in [0,1].$$

3.49. Considerar A un subconjunto conexo y no acotado de un EM (X, d). Demostrar que para todo $a \in A$ y $r > 0$ se cumple que el conjunto $\{x \in A : d(x, a) = r\}$ es no vacío.

3.50.

a) Sean A, B conexos ¿Qué se puede decir sobre la conexidad de $A \cup B$ y de $A \cap B$?

b) Sean A, B conexos con intersección no vacía. Probar que $A \cup B$ es conexo.

3.51. Probar que para un espacio métrico (X, d) son equivalentes:

a) X es conexo.

b) X no se puede escribir como la unión de dos conjuntos no vacíos *separados*.

   Observación: dos conjuntos U, V son *separados* si cada uno es disjunto de la clausura del otro, es decir $U \cap \overline{V} = \emptyset$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

c) Los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

   Observación: Los conjuntos con esta propiedad se conocen como conjuntos abierto-cerrados (clopen sets).

4 Sucesiones y series

En este capítulo vamos a estudiar la convergencia de sucesiones (y series) en espacios métricos. Este concepto está relacionado a la noción de *completitud* de un espacio métrico, que es fundamental en el análisis.

4.1 Convergencia de sucesiones en espacios métricos

Sea X un conjunto. Recordemos que una sucesión en X es una función $f : \mathbb{N}^* \to X$ (o bien $f : \mathbb{N} \to X$). En este caso, a la sucesión también la notamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o $(x_n)_{n\geq 1}$, donde $x_n = f(n)$ para $n \in \mathbb{N}^*$.

Definición 4.1. Sea (X, d) un EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X.

1. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en (X, d) si existe $p \in X$ tal que: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tal que

$$d(p, x_n) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0 \,.$$

   En este caso decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$ y que $p \in X$ es el límite de $(x_n)_{n\geq 1}$ y notamos

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p \quad \text{ó} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = p \,.$$

2. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge en (X, d) si la sucesión no converge en (X, d).

△

Obs 4.2. Sea (X, d) un EM.

1. Notemos que la noción de convergencia de una sucesión depende tanto de X como de la métrica d. Por ejemplo: sea $x_n = 1/n$, $n \geq 1$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Es claro que esta sucesión converge a $p = 0$ en este caso. Pero notemos que si consideramos $Y = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ como subespacio métrico, entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en Y que no converge en el subespacio métrico (Y, d_Y) (porque $0 \notin Y$).

2. Por otro lado, si una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X diverge entonces, para todo $p \in X$ debe existir $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ tal que: para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(p, x_n) > \varepsilon$ (que surge de negar la definición de convergencia □).

△

Definición 4.3. Sea (X, d) un EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada si existe $q \in X$ y $t > 0$ tal que $x_n \in B_t(q)$, para todo $n \geq 1$ (es decir, el conjunto $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq X$ está acotado). △

Teorema 4.4. *Sea (X, d) un EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X.*

1. *$(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$ si y solo si: para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.*

2. *Supongamos que $p, q \in X$ son tales que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p y también a q. Entonces $p = q$.*

3. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X entonces es acotada.*

4. *Si $E \subseteq X$ y $p \in E'$ entonces existe una sucesión $(e_n)_{n\geq 1}$ tal que: $e_n \in E$, $e_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} e_n = p$ en (X, d).*

Demostración. Para ver 1., supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$ y sea $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$. En este caso existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subseteq U$, porque U es abierto. Si tomamos este $\varepsilon > 0$ en la definición de convergencia, entonces debe existir $n_0 \geq 1$ tal que $d(p, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Así, si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(p) \subseteq U$ y por lo tanto, $x_n \in U$. Recíprocamente, supongamos que para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Dado $\varepsilon > 0$ consideramos $U = B_\varepsilon(p)$ que es un abierto que contiene a p; así, debe existir $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(p)$, es decir $d(x_n, p) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Esto último muestra (por definición) que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$.

Para verificar 2., supongamos que $p \neq q$: en este caso, $d(p, q) > 0$. Si tomamos $\varepsilon = d(p, q)/2 > 0$ entonces existen n_0, $n_1 \geq 1$ tales que $d(x_n, p) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y $d(x_n, q) < \varepsilon$ si $n \geq n_1$; si $n \geq \max\{n_0, n_1\} \geq 1$ entonces notemos que

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = d(p, q)\,.$$

La contradicción anterior muestra que se debe verificar que $p = q$.

Veamos 3. Por hipótesis existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ (y por el ítem anterior ahora sabemos que este $p \in X$ ¡es el único límite!). Si tomamos $\varepsilon = 1 > 0$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que para $n \geq n_0$, $d(p, x_n) < 1$. Consideremos

$$M = \max\{d(p, x_n) :\ 1 \leq n \leq n_0\} \geq 0$$

y sea $r = M + 1 \geq \max\{M, 1\}$; entonces vale que $d(p, x_n) < r$ para todo $n \geq 1$: esto se ve mirando los casos $1 \leq n \leq n_0$ y $n \geq n_0$ (□).

Finalmente, verificamos 4: por hipótesis, para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(p) \cap E$ es conjunto infinito: en particular, para cada $n \geq 1$, $B_{1/n}(p) \cap E$ es conjunto infinito y podemos elegir un elemento $x_n \in B_{1/n}(p) \cap E$ tal que $x_n \neq p$. De esta forma la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ satisface: $x_n \in E$, $x_n \neq p$, $n \geq 1$ por construcción. Además, dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \geq 1$ tal que $0 < 1/n_0 < \varepsilon$: en este caso, si $n \geq n_0$ entonces $0 < 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$ y $d(p, x_n) < 1/n < \varepsilon$. Esto último muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. ■

Obs 4.5. Sea (X, d) un EM y sea $\tau_d = \{U \subseteq X :\ U \text{ es abierto}\}$, la topología inducida por d. La caracterización de la convergencia de sucesiones dada en el ítem 1. del resultado anterior muestra que la noción de convergencia solo depende de τ_d. Es decir, si d_1 y d_2 son dos métricas en X débilmente equivalentes es decir, $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ entonces: dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X y dado $p \in X$ vale que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en (X, d_1) si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en (X, d_2) (□ de vista). △

En lo que sigue vamos a considerar el cuerpo de los números complejos con la métrica inducida por el módulo, es decir: dados $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$d(z, w) = |z - w| = (\overline{(z - w)}(z - w))^{1/2}\,.$$

Recordemos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ está incluido como cuerpo y como subespacio métrico. Notemos que podemos considerar el concepto de convergencia en este espacio métrico particular.

Teorema 4.6. *Supongamos que $(s_n)_{n\geq 1}$, $(t_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$.
2. *Si $c \in \mathbb{C}$ entonces* $\lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \cdot s \in \mathbb{C}$ *y* $\lim_{n\to\infty} c + s_n = c + s \in \mathbb{C}$.
3. $\lim_{n\to\infty} (s_n \cdot t_n) = s \cdot t$.

4. Si $t \neq 0$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $t_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$: en este caso existe

$$\lim_{n \geq n_0\ ,\ n \to \infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{s}{t}\,.$$

5. $\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}$.

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0$; por hipótesis existen $n_0 \geq 1$ y $n_1 \geq 1$ tales que $|s_n - s| < \varepsilon/2$ para $n \geq n_0$ y $|t_n - t| < \varepsilon/2$ para $n \geq n_1$. En este caso, sea $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$: si $n \geq n_2$

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| = |(s_n - s) + (t_n - t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

que prueba 1.

2. Si $c = 0$ entonces $s_n \cdot c = 0$ para todo $n \geq 1$ y en este caso es sencillo verificar que $(s_n \cdot c)_{n\geq 1}$ converge a $0 = s \cdot c$ ($\square$). Supongamos que $c \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$: sea $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$ (donde usamos que $\dfrac{\varepsilon}{|c|} > 0$ está definido y la hipótesis de convergencia). Entonces, si $n \geq n_0$

$$|s_n \cdot c - s \cdot c| = |(s_n - s) \cdot c| = |(s_n - s)| \cdot |c| < \frac{\varepsilon}{|c|} \cdot |c| = \varepsilon$$

que prueba la primera afirmación del ítem 2. La segunda afirmación es un ejercicio $\square$.

3. Notemos la identidad ($\square$)

$$s_n \cdot t_n = s \cdot t + (s_n - s) \cdot (t_n - t) + s \cdot (t_n - t) + t \cdot (s_n - s)\,.$$

De las hipótesis de convergencia, concluimos que ($\square$)

$$\lim_{n\to\infty} t_n - t = \lim_{n\to\infty} s_n - s = 0.$$

Del ítem 2. deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} s \cdot (t_n - t) = \lim_{n\to\infty} t \cdot (s_n - s) = 0\,.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existen n_0, $n_1 \geq 1$ tales que:

$$|s_n - s| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \text{y} \quad |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{si} \quad n \geq n_1\,,$$

donde usamos que $\sqrt{\varepsilon} > 0$. Sea $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ y sea $n \geq n_2$: entonces

$$|(s_n - s) \cdot (t_n - t)| = |(s_n - s)| \cdot |(t_n - t)| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon\,,$$

que prueba que $\lim_{n\to\infty} (s_n - s) \cdot (t_n - t) = 0$. Aplicando los hechos anteriores, el ítem 1 (tres veces) y el ítem 2. (con la suma) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} s_n \cdot t_n = \lim_{n\to\infty} (s \cdot t + (s_n - s) \cdot (t_n - t) + s \cdot (t_n - t) + t \cdot (s_n - s)) = s \cdot t + 0 + 0 + 0 = s \cdot t\,.$$

Veamos la prueba de 4. Si $t \neq 0$ entonces $|t| > 0$; sea $\varepsilon = |t|/2 > 0$ y sean $n_0 \geq 1$ tal que $|t_n - t| < |t|/2$ siempre que $n \geq n_0$. Entonces, si $n \geq n_0$:

$$|t| = |t - t_n + t_n| \leq |t - t_n| + |t_n| \implies 0 < |t|/2 < |t| - \underbrace{|t_n - t|}_{<|t|/2} \leq |t_n|$$

y en particular, $t_n \neq 0$ y $|1/t_n| \leq 2/|t|$. Veamos que la sucesión $(1/t_n)_{n\geq n_0}$ converge a $1/t$. En efecto: sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_1 \geq n_0$ tal que

$$|t_n - t| < \frac{1}{2}|t|^2\,\varepsilon\,,$$

donde hemos usado que $|t|^2\,\varepsilon > 0$. Entonces, si $n \geq n_1 (\geq n_0)$

$$\left|\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t}\right| = \left|\frac{t - t_n}{t_n \cdot t}\right| < \left|\frac{1}{t_n \cdot t}\right| \ \frac{1}{2}|t|^2\,\varepsilon \leq \varepsilon$$

donde hemos usado que $|1/t_n| \leq 2/|t|$, de forma que

$$\left|\frac{1}{t_n \cdot t}\right| = \left|\frac{1}{t}\right| \cdot \left|\frac{1}{t_n}\right| \leq \frac{2}{|t|^2}\,.$$

Finalmente, como $\dfrac{s_n}{t_n} = s_n \cdot \dfrac{1}{t_n}$ con $n \geq n_0$, el ítem 3 muestra que vale 4.

Para verificar el ítem 5., notemos que

$$|\overline{s} - \overline{s}_n| = |\overline{s - s_n}| = |s - s_n|$$

por las propiedades de la conjugación y el módulo. Lo anterior implica que vale 5. (los detalles son ejercicios □). ■

Obs 4.7. Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que converge a $s \in \mathbb{C}$. Definimos $a_n = \Re(s_n)$ y $b_n = \Im(s_n)$, $n \geq 1$. Entonces las sucesiones reales $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ convergen a $\Re(s)$ y $\Im(s)$ en $\mathbb{R}$ respectivamente. En efecto,

$$|a_n - \Re(s)| = |\Re(s_n) - \Re(s)| = |\Re(s_n - s)| \leq |s_n - s|\,.$$

De forma análoga, $|b_n - \Im(s)| \leq |s_n - s|$. Las desigualdades anteriores prueban que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \Re(s)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \Im(s)$ en $\mathbb{R}$.

En particular, si $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a $s \in \mathbb{C}$ entonces $s \in \mathbb{R}$ (el límite de una sucesión real es un valor real). En efecto, basta notar que $\Im(s_n) = 0$, $n \geq 1$. Por el párrafo anterior $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \Im(s_n) = \Im(s)$, que muestra que $s \in \mathbb{R}$. △

En lo que sigue consideramos $\mathbb{R}^k$ con su estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además, consideramos la métrica (euclídea) usual de $\mathbb{R}^k$ inducida por la norma euclídea, que proviene del producto interno usual de $\mathbb{R}^k$.

Teorema 4.8. *Consideremos $(\mathbb{R}^k, d_k)$ con su métrica (euclídea) usual.*

1. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^k$,*

   $$x_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n}) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

   y sea $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x en $(\mathbb{R}^k, d_k)$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ en $(\mathbb{R}, d_1)$ (con su métrica euclídea usual) para $1 \leq j \leq k$.

2. *Sean $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{R}^k$, y sea $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ sucesión en $\mathbb{R}$ tales que*

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}^k \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}^k \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

   Entonces

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y \in \mathbb{R}^k$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n \cdot x_n = \gamma \cdot x \in \mathbb{R}^k$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \in \mathbb{R}$.

Demostración. 1. Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x en $(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k})$. Fijado $1 \leq j \leq k$, consideramos la sucesión real $(\alpha_{j,n})_{n\geq 1}$, dada por las j-ésimas coordenadas de los vectores en $(x_n)_{n\geq 1}$. Queremos verificar que esta sucesión converge en $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Para ver esto, sea $\varepsilon > 0$: por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\varepsilon > d_{\mathbb{R}^k}(x_n, x) = \|x_n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} (\alpha_{i,n} - \alpha_i)^2\right)^{1/2} \geq \left((\alpha_{j,n} - \alpha_j)^2\right)^{1/2} = |\alpha_{j,n} - \alpha_j|$$
$$= d_{\mathbb{R}}(\alpha_{j,n}, \alpha_j)$$

donde hemos usado que la suma de términos no negativos es más grande que cada término individual y el hecho de que la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ es una función monótona creciente. Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ en $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, $1 \leq j \leq k$.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ en $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, $1 \leq j \leq k$. Sea $\varepsilon > 0$: por hipótesis, para cada $1 \leq j \leq k$ existe $n_j \geq 1$ tal que

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} > d_{\mathbb{R}}(\alpha_{j,n}, \alpha_j) = |\alpha_{j,n} - \alpha_j| \geq 0 \quad \text{para} \quad n \geq n_j\,.$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\} \geq 1$: si $n \geq n_0$ entonces $n \geq n_j$ para $1 \leq j \leq k$ y entonces

$$d_{\mathbb{R}^k}(x_n, x) = \|x_n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} (\alpha_{i,n} - \alpha_i)^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

que muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k})$.

Para probar $2a$) podemos usar el criterio dado en el ítem 1. (ya probado) y el Teorema 4.6. En efecto, si escribimos

$$y = (\beta_1, \ldots, \beta_k) \quad \text{y} \quad y_n = (\beta_{1,n}, \ldots, \beta_{k,n}) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

entonces

$$x_n + y_n = (\alpha_{1,n} + \beta_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n} + \beta_{k,n}) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad n \geq 1\,.$$

Como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ en $(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k})$ entonces, por el ítem 1, vemos que $\lim_{n\to\infty} \beta_{j,n} = \beta_j$ en $(\mathbb{R}, d_1)$ para $1 \leq j \leq k$. Por el Teorema 4.6 y los hechos anteriores, ahora podemos ver que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} + \beta_{j,n} = \alpha_j + \beta_j \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq k\,.$$

El ítem 1 nos permite concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$ en $(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k})$.

La prueba de los ítems $2b$) y $2c$) es similar ($\square$).

Para ver $2d$), notamos que

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \implies \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

De forma similar $\|x\| - \|x_n\| \leq \|x - x_n\| = \|(-1)(x_n - x)\| = \|x_n - x\|$. Las desigualdades anteriores muestran que

$$d_{\mathbb{R}}(\|x_n\|, \|x\|) = |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| .$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, si $n_0 \geq 1$ es tal que $d_{\mathbb{R}^k}(x_n, x) = \|x_n - x\| < \varepsilon$, para $n \geq n_0$ entonces: $d_{\mathbb{R}}(\|x_n\|, \|x\|) < \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Esto último prueba $2d$). ■

Obs 4.9. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}^k$. Luego $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \in \mathbb{R}$ no implica $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}^k$. Por ejemplo, sea $x = (1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$. Definimos la sucesión (x_n) como $x_n = (0, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces:

$$\|x_n\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad \|x\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 = \|x\|.$$

Sin embargo, x_n no converge a x, ya que para todo n, $x_n = (0, 1) \neq (1, 0)$. De hecho, la distancia entre x_n y x es constante para todo n:

$$\|x_n - x\| = \|(-1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

△

4.2 Subsucesiones

Definición 4.10. Sea X un conjunto y sean $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en X. Decimos que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ si existe una función $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente (si $n < m$ entonces $f(n) < f(m)$) tal que $y_n = x_{f(n)}$, para $n \geq 1$.

En este caso notamos $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ (donde $n_k = f(k)$ para $k \geq 1$) para indicar que $(y_k)_{k\geq 1}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$. △

Obs 4.11. Dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X podemos pensar que una subsucesión se obtiene de tomar algunos de sus términos dando *saltos hacia adelante*:

$$x_1 \quad x_2 \quad \underbrace{x_3}_{=x_{n_1}} \quad x_4 \quad \underbrace{x_5}_{=x_{n_2}} \quad x_6 \quad x_7 \quad \underbrace{x_8}_{=x_{n_3}} \quad x_9 \quad x_{10} \ldots$$

donde hemos elegido los saltos $f(1) = n_1 = 3$, $f(2) = n_2 = 5$, $f(3) = n_3 = 8$, ... △

Obs 4.12. Sea X un conjunto y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión determinada por la función estrictamente creciente $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Notemos que $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ es en sí misma una sucesión (donde $y_k = x_{f(k)}$, $k \geq 1$). De forma que podemos tomar una subsucesión $(z_j)_{j\geq 1} = (y_{k_j})_{j\geq 1}$ de la sucesión $(y_k)_{k\geq 1}$, determinada por la función estrictamente creciente $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ (es decir, $z_j = y_{h(j)}$, $j \geq 1$). Entonces $(z_j)_{j\geq 1}$ es también una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$: en efecto, sea $g = f \circ h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la composición de las funciones estrictamente crecientes h y f. Entonces g es estrictamente creciente: si $n < m$ entonces $h(n) < h(m)$ y luego $g(n) = f(h(n)) < f(h(m)) = g(m)$; además, $z_j = y_{h(j)} = x_{f(h(j))} = x_{g(j)}$, $j \geq 1$.

Así, una subsucesión de una subsucesión ¡es subsucesión! △

Obs 4.13. Sea $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una función estrictamente creciente. Entonces $f(k) \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Verificamos lo anterior por inducción: notemos que $f(1) \in \mathbb{N}^*$ y luego $f(1) \geq 1$. Si asumimos que $k \leq f(k)$ para un cierto $k \in \mathbb{N}^*$ entonces $f(k + 1) > f(k) \geq k$ que muestra que $f(k + 1) \geq k + 1$. △

Proposición 4.14. *Sea (X,d) un EM, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X y sea $p \in X$. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en X entonces toda subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en X.*

Demostración. Suponemos que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ en X, y sea $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión. En este caso, existe $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente, tal que $y_k = x_{f(k)}$ para $k \in \mathbb{N}^*$.

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(p, x_n) < \varepsilon$. Por la observación anterior, si $k \geq n_0$ entonces $f(k) \geq k \geq n_0$, de forma que $d(p, y_k) = d(p, x_{f(k)}) < \varepsilon$. Pero esto indica que $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} p$ en X. ■

Proposición 4.15. *Sea (X,d) un EM, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X y sea $p \in X$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a p en X si y solo si se verifica que: para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(x_n, p) < \varepsilon\}$ es infinito.*

Demostración. Sea $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión. En este caso, existe $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente, tal que $y_k = x_{f(k)}$ para $k \in \mathbb{N}^*$: notemos que f es inyectiva en este caso. Supongamos que $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} p$ en X: si $\varepsilon > 0$ entonces por hipótesis existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $d(p, y_k) = d(p, x_{f(k)}) < \varepsilon$. Lo anterior muestra que

$$A = \{f(k) : \ k \geq k_0\} \subseteq B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(p, x_n) < \varepsilon\}.$$

Como A es un conjunto infinito (porque f es inyectiva), concluimos que B es un conjunto infinito.

Recíprocamente, supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(x_n, p) < \varepsilon\}$ es infinito. En particular, tomando $\varepsilon = 1$ podemos elegir $n_1 \in B_1$. Supongamos que hemos elegido $n_1 < \ldots < n_k$ tales que $n_j \in B_{1/j}$ para $1 \leq j \leq k$: entonces, como $B_{1/(k+1)}$ es infinito, podemos elegir $n_{k+1} \in B_{1/(k+1)}$ tal que $n_{k+1} > n_k$ (de otra forma, $B_{1/(k+1)} \subseteq \{1, \ldots, n_k\}$ que contradice que $B_{1/(k+1)}$ sea infinito). Continuando de esta forma, determinamos una función $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dada por $f(k) = n_k$, $k \in \mathbb{N}^*$: f resulta estrictamente creciente (por la construcción de n_k, $k \geq 1$). Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ la subsucesión construida a partir de f. Si $\varepsilon > 0$ entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$: si $k \geq k_0$ entonces $1/k \leq 1/k_0 < \varepsilon$ y como $x_{n_k} \in B_{1/k}$ entonces $d(p, x_{n_k}) < 1/k < \varepsilon$, con lo que $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a p en X. ■

Corolario 4.16. *Sea (X,d) un EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Entonces*

$$\mathcal{L} = \{x \in X : \ \exists \text{ una subsucesión } (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\} \subseteq X$$

es un conjunto cerrado en (X,d).

Demostración. Veamos que $X \setminus \mathcal{L}$ es abierto: sea $y \in X \setminus \mathcal{L}$. Por la Proposición 4.15 existe $\varepsilon > 0$ tal que $C = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(y, x_n) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N}^*$ es un conjunto finito. Si $z \in B_\varepsilon(y)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subseteq B_\varepsilon(y)$ (porque $B_\varepsilon(y)$ es abierta). Sea $D = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(z, x_n) < \delta\}$: si $n \in D$ entonces $x_n \in B_\delta(z)$ de forma que $x_n \in B_\varepsilon(y)$ y luego $n \in C$. Así, $D \subseteq C$, lo que muestra que D es un conjunto finito y que $z \in X \setminus \mathcal{L}$ por la Proposición 4.15. El argumento anterior muestra que $B_\varepsilon(y) \subseteq X \setminus \mathcal{L}$. ■

Teorema 4.17. *Sea (X,d) un EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K (es decir, $x_n \in K$, $n \geq 1$). Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a un punto en K.*

Demostración. Sea $A = \{x_n : \ n \geq 1\} \subseteq K$. Si A es un conjunto finito, entonces debe existir $p \in A$ tal que $B = \{n \in \mathbb{N}^* : \ p = x_n\}$ es infinito. En este caso, podemos construir una función $f : \mathbb{N}^* \to B \subseteq \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente: en efecto, como B es no vacío, sea $b_1 \in B$ y definimos $f(1) = b_1$. Como B es infinito debe existir $b_2 \in B$ tal que $b_2 > b_1$ (de otra forma, $B \subseteq \{1, \ldots, b_1\}$, que contradice que B es infinito) y definimos $f(2) = b_2$; si suponemos definidos $f(1) < \ldots < f(k) \in B$ entonces, como B es infinito, debe existir $b_{k+1} \in B$ tal que $b_{k+1} > f(k)$ y definimos $f(k+1) = b_{k+1}$... De esta forma, la subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ asociada a f es constantemente igual a $p \in K$, con lo cual converge a p (□).

Si suponemos que $A \subseteq K$ es un conjunto infinito, como K es compacto se debe tener que $A' \cap K \neq \emptyset$ (Teorema 3.51). Sea $p \in A' \cap K$: por propiedades de A', si $\varepsilon > 0$ se tiene que $C_\varepsilon = B_\varepsilon(p) \cap A$ es conjunto infinito. Así, si definimos

$$B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(x_n, p) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N}^*$$

debe ser infinito: en efecto, si $z \in C_\varepsilon$ entonces existe $n \in \mathbb{N}^*$ (posiblemente ¡no único!) tal que $z = x_n$ y $d(p, x_n) = d(p, z) < \varepsilon$, de forma que $n = h(z) \in B_\varepsilon$. Así queda definida una función $h : C_\varepsilon \to B_\varepsilon$; pero h es inyectiva: si $z, w \in C_\varepsilon$ son tales que $z \neq w$ entonces claramente $h(z) \neq h(w)$ (porque $z = x_{h(z)} \neq w = x_{h(w)}$); como h es inyectiva y C_ε es infinito, entonces $h(C_\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon$ es infinito. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, la Proposición 4.15 muestra que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a p. ■

Corolario 4.18. *Consideremos $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica usual. Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada, es decir tal que $\{x_n : \ n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$ sea un conjunto acotado. En este caso, podemos encontrar un $M > 0$ tal que la sucesión esté contenida en $\overline{B}_M(0) = \{z \in \mathbb{R}^k : \ d(z, 0) \leq M\}$. Como $\overline{B}_M(0) \subseteq \mathbb{R}^k$ es cerrado y acotado entonces resulta compacto. Por el Teorema 4.17 concluimos que, en particular, $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente (a un punto del compacto $\overline{B}_M(0)$). ■

Obs 4.19. Como consecuencia tenemos que en $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica usual, para una sucesión acotada, $\mathcal{L}$ es un no vacío. El conjunto $\mathcal{L}$ volverá a aparecer con otra notación en el caso particular que $X = \mathbb{R}$ dotado de la distancia euclidea usual (ver definición 4.41). △

4.3 Sucesiones de Cauchy

Definición 4.20. Sea (X, d) un EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy[1] si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. △

A continuación vamos a extender la noción de diámetro dada en la definición 3.56 a EM.

Definición 4.21. Sea (X, d) un EM y sea $A \subseteq X$ no vacío. Definimos el diámetro de A, notado $\operatorname{diam}(A)$, dado por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : \ x, \ y \in A\} \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}\,.$$

△

Obs 4.22. Sea (X, d) un EM y sea $A \subseteq X$ no vacío. Verificar las siguientes afirmaciones (□):

[1] En honor al matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

1. $\operatorname{diam}(A) = \infty$ si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existen x, $y \in A$ tales que $d(x, y) \geq n$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
3. Si $\operatorname{diam}(A) < r < \infty$ y $x \in A$ entonces $A \subseteq B_r(x)$.
4. Si $r > 0$ y $x \in X$ entonces $\operatorname{diam}(B_r(x)) \leq 2r$.
5. A es acotado si y solo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

△

Proposición 4.23. *Sea (X, d) un EM y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Entonces $diam(A) = diam(\overline{A})$.*

Demostración. Como $A \subseteq \overline{A}$ el ítem 2 de la observación anterior muestra que $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$. Por otro lado, si $p, q \in \overline{A}$ entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen x, $y \in A$ tales que $d(p, x) < \varepsilon$ y $d(q, y) < \varepsilon$ (porque $B_\varepsilon(p) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(q) \cap A \neq \emptyset$, Proposición 3.29). Por la desigualdad triangular

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) \leq d(p, x) + (d(x, y) + d(y, q)) < d(x, y) + 2\varepsilon \leq \operatorname{diam}(A) + 2\varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $d(p, q) \leq \operatorname{diam}(A)$. Como p, $q \in \overline{A}$ eran arbitrarios, $\operatorname{diam}(A)$ es una cota superior del conjunto $\{d(p, q) : \ p, q \in \overline{A}\}$. Entonces, $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$. ■

Proposición 4.24. *Sea (X, d) un EM y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión en X.*

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy entonces la sucesión es acotada.*
2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy si y solo si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_n = diam\{x_m : m \geq n\}$ está en $\mathbb{R}$ y es tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < 1$. Consideremos $r = \max\{d(x_1, x_n) : \ 1 \leq n \leq n_0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Notemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces: si $1 \leq n \leq n_0$, $d(x_1, x_n) \leq r < r + 1$. Por otro lado, si $n_0 \leq n$ entonces $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n) < r + 1$. Así, $A = \{x_n : \ n \geq 1\} \subseteq B_{r+1}(x_1)$ y es un conjunto acotado. En particular, por la observación anterior, está definido $\operatorname{diam}\{x_n : \ n \geq 1\} < \infty$.

Si suponemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces como $\{x_m : \ m \geq n\} \subseteq A = \{x_m : \ m \geq 1\}$ concluimos que $0 \leq a_n \leq \operatorname{diam}(A) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si n, $m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Así, dado $n \geq n_0$, si r, $s \geq n$ $(\geq n_0)$ entonces $d(x_r, x_s) < \varepsilon$, de forma que $0 \leq a_n \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Así, $d_{\mathbb{R}}(a_n, 0) = |a_n - 0| = a_n \leq \varepsilon$, si $n \geq n_0$; esto muestra que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) a 0.

Recíprocamente, si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ está en $\mathbb{R}$ y converge (con la métrica usual) a 0 entonces: dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\sup\{d(x_m, x_t) : \ m, t \geq n\} = \operatorname{diam}\{x_m : \ m \geq n\} = a_n = |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Como $n_0 \geq n_0$ (¡ja!) vemos que si $m, t \geq n_0$ entonces $d(x_m, x_t) < \varepsilon$. Esta última afirmación muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy en (X, d). ■

Proposición 4.25. *Sea (X, d) un EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X.*

1. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X entonces es de Cauchy.*
2. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p \in X$ entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$.*

Demostración. 1. Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(p, x_n) < \varepsilon/2$. Entonces, si $n, m \geq n_0$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

2. Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y tal que su subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a $p \in X$. Sea $\varepsilon > 0$: por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Además, existe $k_0 \geq n_0$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $d(p, x_{n_k}) < \varepsilon/2$. Entonces, si $n \geq n_0$:

$$d(p, x_n) \leq d(p, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

donde hemos usado que $n_{k_0} \geq k_0 \geq n_0$ para acotar el segundo término de arriba. ■

Teorema 4.26. *Sea (X, d) un EM, sea $K \subseteq X$ compacto y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Hemos visto que toda sucesión convergente es de Cauchy. Por otro lado, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K que es de Cauchy. Entonces, por el Teorema 4.17 $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge en X. Por el ítem 2 de la proposición anterior concluimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X. ■

Teorema 4.27. *Sea $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^k$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}^k$ si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.*

Demostración. Basta probar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy entonces converge. En este caso, por la Proposición 4.24 $(x_n)_{n\geq 1}$ es acotada. Entonces, por el Corolario 4.18 $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente. Finalmente, por la Proposición 4.25 vemos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge.

■

Obs 4.28. El teorema anterior se llama criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}^k$: la gran ventaja de este criterio sobre la definición de convergencia es que podemos determinar que una sucesión converge sin la necesidad de conocer (o determinar) el (límite) punto al cual converge. △

La Observación anterior motiva la siguiente noción

Definición 4.29. Sea (X, d) un EM. Decimos que (X, d) es un EM completo si toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge en (X, d). △

Notemos que el Teorema 4.27 muestra que $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual es un espacio métrico completo. El Teorema 4.26 prueba que si (X, d) es un EM tal que X es compacto, entonces (X, d) es completo. Por otro lado, si (X, d) es un EM completo entonces notemos que vale un criterio de Cauchy: una sucesión en (X, d) converge si y solo si es de Cauchy (momento de reflexión).

Teorema 4.30. *El espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$ con la métrica usual es completo.*

Demostración. Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que es de Cauchy. Para cada $n \geq 1$ sea $a_n = \Re(z_n) \in \mathbb{R}$ y $b_n = \Im(z_n) \in \mathbb{R}$ las partes real e imaginarias de z_n. Notemos que

$$|a_n - a_m| = |\Re(z_n) - \Re(z_m)| = |\Re(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| = d(z_n, z_m)\,.$$

De forma similar, $|b_n - b_m| \leq |z_n - z_m|$. Las desigualdades anteriores muestran que las sucesiones reales $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$, con la métrica usual (dada por el módulo en $\mathbb{R}$). Como $\mathbb{R}$ es completo, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. A su vez, existe $n_1 \geq 1$ tal que $|b_n - b| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_1$. Tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$ tenemos que, para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} d(z_n, (a + b\,i)) &= |(a_n + b_n i) - (a + b\,i)| = |(a_n - a) + (b_n - b)\,i| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad triangular del módulo y el hecho de que $|i| = 1$. La desigualdad anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} z_n = a + b\,i \in \mathbb{C}$. ■

Proposición 4.31. *Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$. Dado $p \in X$ entonces $p \in \overline{E}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Si $p \in E$ estamos, porque $E \subseteq \overline{E}$. Si $p \notin E$ entonces $p \neq x_n \in E$ para todo $n \geq 1$. Sea $\varepsilon > 0$; por hipótesis existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(p, x_n) < \varepsilon$. Pero en este caso, $x_{n_0} \in (B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$. Lo anterior muestra que $p \in E' \subseteq \overline{E}$.

Recíprocamente, sea $p \in \overline{E} = E \cup E'$. Si $p \in E$ entonces podemos definir $x_n = p$, $n \geq 1$. En este caso $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en E que converge a p. Por otro lado, si $p \notin E$ entonces $p \in E'$: en este caso hemos probado en la Proposición 4.4 que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E que converge a p. ■

Corolario 4.32. *Sea $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual, y $E \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Si E está acotado superiormente entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup E$.*
2. *Si E está acotado inferiormente entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf E$.*

Demostración. Recordemos que hemos probado que $\sup E \in \overline{E}$ y que $\inf E \in \overline{E}$ (Teorema 3.32). Ahora podemos aplicar la Proposición 4.31. ■

Proposición 4.33. *Sea (X, d) un EM completo y sea $E \subseteq X$ cerrado. Entonces el subespacio métrico (E, d_E) es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en (E, d_E). Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. Por hipótesis existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Pero esto último muestra que $p \in \overline{E} = E$ (porque E es cerrado). Ahora es sencillo verificar que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in E$ en el subespacio métrico (E, d_E) (□). ■

4.4 Sucesiones en $\mathbb{R}$

En lo que sigue vamos a considerar $\mathbb{R}$ (y más generalmente $\mathbb{R}^k$) con la métrica usual $d(r, s) = |r - s|$, $r, s \in \mathbb{R}$. Recordemos que en $\mathbb{R}$ tenemos definido una relación de orden, que tiene la propiedad de la mínima cota superior. Esto sugiere considerar las siguientes nociones.

Definición 4.34. Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Decimos que es

1. monótona creciente si $s_n \leq s_{n+1}$ para $n \geq 1$.
2. monótona decreciente si $s_n \geq s_{n+1}$ para $n \geq 1$.

3. monótona si es monótona creciente o monótona decreciente.

△

Dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ decimos que está acotada superiormente (respectivamente inferiormente) si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ (respectivamente $x_n \geq M$), $n \geq 1$. Notemos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ está acotada (en el sentido de espacios métricos) si y solo si está acotada superiormente e inferiormente ¡a la vez! (□).

A modo de observación, notemos que una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ que es monótona creciente siempre está acotada inferiormente, porque $x_1 \leq x_n$, $n \geq 1$. De forma similar, si $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ es monótona decreciente entonces está acotada superiormente (□).

Teorema 4.35. *Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Entonces $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ si y solo si es acotada.*

Demostración. Si suponemos que $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente en $\mathbb{R}$ entonces es una sucesión acotada (Por el Teorema 4.4 item 3.).

Supongamos que $(s_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente y que está acotada. En este caso, existe $p \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tal que $s_n \in B_r(p) = (p - r, p + r)$, $n \geq 1$. Así, $s_n \leq p + r$ con $n \geq 1$ lo que muestra que $E = \{s_n : \ n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ está acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup E$ y notemos que $s_n \leq \alpha$ para $n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ entonces $\alpha - \varepsilon < \alpha$ de forma que $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de$E$: así, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\alpha - \varepsilon < s_{n_0}$. Pero si $n \geq n_0$ entonces $\alpha - \varepsilon < s_{n_0} \leq s_n \leq \alpha$, que muestra que $d(\alpha, s_n) < \varepsilon$, $n \geq n_0$. El caso de sucesiones monótonas decrecientes es similar (□). ■

Obs 4.36. Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona creciente y acotada superiormente en $\mathbb{R}$. Entonces la prueba anterior muestra que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a $\sup\{s_n : \ n \geq 1\}$. De forma similar se verifica que si $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ entonces $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a $\inf\{s_n : \ n \geq 1\}$ (□). △

En lo que sigue desarrollamos las nociones de límite inferior y superior de sucesiones reales. Vamos a necesitar las siguientes nociones de convergencia hacia los infinitos.

Definición 4.37. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en $\mathbb{R}$. Decimos que

1. $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $+\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \geq M$, $n \geq n_0$. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $-\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \leq M$, $n \geq n_0$. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

△

Obs 4.38. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada superiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

De forma similar, $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada inferiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$. (□). △

Obs 4.39. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a algún punto en $\overline{\mathbb{R}}$: en efecto, si $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada, hemos probado que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene alguna subsucesión convergente. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ no está acotada, entonces la Observación 4.38 muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene alguna subsucesión que converge a p, donde $p = -\infty$ o $p = +\infty$. △

La siguiente observación será de gran utilidad.

Obs 4.40. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \overline{\mathbb{R}}$. Supongamos que $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ es tal que existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \leq \alpha$ para $n \geq n_0$. Entonces $p \leq \alpha$: para verificar esta afirmación, consideramos casos. Si suponemos que $\alpha, p \in \mathbb{R}$ y $\alpha < p$, sea $\varepsilon = p - \alpha > 0$. Por hipótesis existe $n_1 \geq 1$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(p) = (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$, si $n \geq n_1$. En particular, si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ entonces ¡ $x_n \leq \alpha$, $\alpha = p - \varepsilon < x_n$! La contradicción anterior muestra que $p \leq \alpha$. Los demás casos son ejercicios (□) (tener en cuenta las convergencias hacia los infinitos cuando $p = -\infty$ o $p = +\infty$).

De forma análoga se verifica que: si $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \overline{\mathbb{R}}$ y existen $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ y $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \geq \alpha$ para $n \geq n_0$ entonces $p \geq \alpha$ (□). △

Definición 4.41. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Sea

$$E = \{p \in \overline{\mathbb{R}} : \ \exists\, (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Entonces definimos:

- el límite inferior de $(x_n)_{n\geq 1}$ dado por: $\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf E \in \overline{\mathbb{R}}$.
- el límite superior de $(x_n)_{n\geq 1}$ dado por: $\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup E \in \overline{\mathbb{R}}$.

△

Obs 4.42. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Recordemos que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ es no vacío entonces existen $\inf A$, $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$. Así, para verificar que los límite superior e inferior están bien definidos basta con verificar que $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (como en la definición anterior) satisface que $E \neq \emptyset$. Para esto, consideramos dos casos: si $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada entonces hemos probado que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (ver observación 4.19). Por otro lado, si $(x_n)_{n\geq 1}$ no está acotada entonces la Observación 4.38 muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge en $\overline{\mathbb{R}}$. Además se verifica por definición que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

△

Ejemplo 4.43. Recordemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito numerable. Así, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es un conjunto infinito numerable. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una función biyectiva; en este caso podemos definir la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ dada por $x_n = f(n)$, $n \geq 1$.

Si $p \in [0,1]$ y $r > 0$ entonces $B_r(p) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ es un conjunto infinito: entonces $\{n \geq 1 : \ x_n \in B_r(p)\}$ es infinito; como $r > 0$ es arbitrario concluimos que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p$. Por otro lado, para cualquier subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a $q \in \overline{\mathbb{R}}$ se tiene que $0 \leq x_{n_k} \leq 1$; en este caso hemos probado que $0 \leq q \leq 1$.

De lo anterior vemos que

$$E = \{p \in \overline{\mathbb{R}} : \ \exists\, (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p\} = [0,1]\,.$$

En este caso, $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ y $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$. △

Obs 4.44. Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ no vacío. Definimos $-A = \{-x : \ x \in A\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (en este caso seguimos la convención $-(-\infty) = +\infty$ y $-(+\infty) = -\infty$). Entonces se verifica que $\sup(-A) = -\inf A$ y $\inf(-A) = -\sup A$.

Por otro lado, si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$, podemos considerar la sucesión $(-x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ y se verifica: si

$$E = \{p \in \overline{\mathbb{R}} : \ \exists\, (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$$

$$F = \{q \in \overline{\mathbb{R}} : \ \exists\, (-x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ \lim_{k\to\infty} -x_{n_k} = q\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$$

entonces $F = -E$. Las observaciones anteriores permiten verificar que

$$\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Todas las afirmaciones anteriores son un (largo pero sencillo) ejercicio (□). △

Teorema 4.45. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces*

LS1. Existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

LS2. Si $\alpha > \limsup_{n\to\infty} x_n$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n < \alpha$, $n \geq n_0$.

De forma similar

LI1. Existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \liminf_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

LI2. Si $\alpha < \liminf_{n\to\infty} x_n$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n > \alpha$, $n \geq n_0$.

Además, las propiedades LS1. y LS2. (respectivamente LI1. y LI2.) caracterizan a $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (respectivamente $\liminf_{n\to\infty} x_n$) en $\overline{\mathbb{R}}$.

Demostración. Consideramos el conjunto

$$E = \{p \in \overline{\mathbb{R}} : \ \exists\, (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$$

como en la Definición 4.41.

Probamos *LS2*: Sea $\alpha > \limsup_{n\to\infty} x_n$; si $\alpha = +\infty$ la propiedad LS2. se verifica trivialmente. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}$: en particular, $\limsup_{n\to+\infty} x_n < \infty$. Supongamos que $C = \{n \geq 1 : \ x_n \geq \alpha\}$ es conjunto infinito (numerable). En este caso podemos elegir elementos $n_k \in C$ tales que $n_k < n_{k+1}$ para $k \geq 1$ (□). Esta elección nos permite determinar una subsucesión $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $y_k = x_{n_k} \geq \alpha$, $k \geq 1$ (porque $n_k \in C$, $k \geq 1$). Pero si aplicamos la Observación 4.42 a la sucesión $(y_k)_{k\geq 1}$, entonces existe una subsucesión $(y_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $\lim_{j\to\infty} y_{k_j} = q \in \overline{\mathbb{R}}$. Por la Observación 4.12 $(y_{k_j})_{j\geq 1}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ y luego $q \in E$ de forma que $q \leq \limsup_{n\to\infty} x_n < \infty$. Como $x_{n_k} \geq \alpha$, $k \geq 1$ entonces, por la Observación 4.40, concluimos que $q \geq \alpha$. Pero entonces ¡ $\alpha \leq q \leq \limsup_{n\to\infty} x_n < \alpha$! Esta contradicción indica que $C = \{n \geq 1 : \ x_n \geq \alpha\}$ es conjunto finito y vale LS2.

Para probar LS1. consideramos los siguientes casos.

Caso 1: $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Supongamos que existen $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para $n \geq 1$. Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión que converge a $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Notemos que vale que $x_{n_k} \leq M$ para $k \geq 1$. Por la Observación 4.40 concluimos que $p \leq M$: lo anterior muestra que M es cota superior de E y luego que $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq M$, en contra de nuestra hipótesis. Así, $(x_n)_{n\geq 1}$

no está acotada superiormente. La Observación 4.38 muestra que existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.

Caso 2: $\ell = \limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\ell - \varepsilon$ no es cota superior de E, por lo que existe una función estrictamente creciente (y en particular inyectiva) $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que la subsucesión $(x_{f(k)})_{k\geq 1}$ es tal que $\ell \geq \lim_{k\to\infty} x_{f(k)} = e > \ell - \varepsilon$. Este último hecho muestra que $B = \{f(k) \geq 1 :\ x_{f(k)} > \ell - \varepsilon\}$ es conjunto infinito. Así, $B \subseteq C_\varepsilon := \{n \geq 1 :\ x_n > \ell - \varepsilon\}$ es conjunto infinito.

En particular, podemos elegir $n_1 \in C_1$; como $C_{1/2}$ es infinito, podemos elegir $n_1 < n_2 \in C_{1/2}$; de esta forma, si suponemos que hemos elegido $n_1 < \ldots < n_k$ con $n_j \in C_{1/j}$, $1 \leq j \leq k$ entonces (usando que $C_{1/(k+1)}$ es conjunto infinito) podemos elegir $n_k < n_{k+1} \in C_{1/(k+1)}$. De esta forma determinamos la subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que verifica: $x_{n_k} > \ell - 1/k$. Dado $\varepsilon > 0$ entonces, por LS2., existe n_0 tal que $x_n < \ell + \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Además, existe $k_0 \geq 1$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$. Si $k \geq \max\{n_0, k_0\}$ entonces: $n_k \geq k \geq n_0$ garantiza que $x_{n_k} < \ell + \varepsilon$; por otro lado, $1/k \leq 1/k_0 < \varepsilon$ garantiza $x_{n_k} > \ell - 1/k > \ell - \varepsilon$. De esta forma, para todo $k \geq \max\{n_0, k_0\}$ se tiene que $|x_{n_k} - \ell| < \varepsilon$; como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, vemos que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell$.

Caso 3: $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty = \sup E$. Como $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ es no vacío y tal que $\sup E = -\infty$, entonces $E = \{-\infty\}$ (□). En este caso, por construcción de E existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

Finalmente, supongamos que ℓ_1, $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ son tales que satisfacen LS1. y LS2.. (así como $\limsup_{n\to\infty} x_n$). Supongamos que $\ell_1 < \ell_2$ y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\ell_1 < r < \ell_2$. Por LS1. aplicado a ℓ_2, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell_2$. Por otro lado, por LS2. aplicado a ℓ_1, existe un $k_0 \geq 1$ tal que $x_{n_k} < r$ para todo $k \geq k_0$. Entonces $\ell_2 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq r < \ell_2$, que es un absurdo. Entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Las afirmaciones para el límite inferior se prueban de forma análoga (□). Otro método para probar estas afirmaciones es usar la Observación 4.44. ■

Obs 4.46. Por la observación 3.32 sabemos que $\sup(E) \in \overline{E}$, pero LS1. nos dice más aún, que además tenemos que

$$\limsup x_n \in E := \{p \in \overline{\mathbb{R}} :\ \exists\, (x_{n_k})_{k\geq 1}\ ,\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

Análogamente, $\liminf x_n \in E$ por LS2. △

Teorema 4.47. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$;*
2. *$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Notar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces $E = \{\ell\}$ (los detalles cuando $\ell = \pm\infty$ quedan como ejercicio □).

Recíprocamente, si $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, consideramos casos. Si $\ell = +\infty$ entonces usando LI2, dado $M \in \mathbb{R}$ entonces $M < \ell$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ si $n \geq n_0$. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty = \ell$. Si $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces, usando LS2 y LI2, existen n_0, $n_1 \geq 1$ tales que $x_n < \ell + \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y $\ell - \varepsilon < x_n$ si $n \geq n_1$. Así, si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ entonces $|\ell - x_n| < \varepsilon$. Lo anterior prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Si $\ell = -\infty$ entonces se puede hacer un argumento similar al primer caso (□) y concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty = \ell$. ■

Teorema 4.48. *Sean $s_n, t_n \in \mathbb{R}$ tales que $s_n \leq t_n$, $n \geq N$ para cierto N. Entonces,*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \quad y \quad \limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n \,.$$

Demostración. Si $\liminf_{n\to\infty} s_n = +\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (¡momento de reflexión!); como $s_n \leq t_n$, $n \geq N$, entonces debemos tener que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ con lo que $\liminf_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Por otro lado, si $\liminf_{n\to\infty} t_n = -\infty$ entonces existe una subsucesión $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = -\infty$ que fuerza a que $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = -\infty$ (porque $s_{n_k} \leq t_{n_k}$ para $k \geq 1$) y en ese caso $\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty$, y el resultado vale.

Entonces podemos suponer que $\infty > \alpha = \liminf_{n\to\infty} s_n$ y que $\beta = \liminf_{n\to\infty} t_n > -\infty$. Supongamos que $\alpha > \beta$ y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > r > \beta$. Entonces existe un n_0 tal que $s_n > r$ para $n \geq n_0$ (porque $r < \alpha$ y la propiedad LI2). Sea $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = \beta$; notemos que si $k \geq n_0$ entonces $n_k \geq k \geq n_0$ y $t_{n_k} \geq s_{n_k} > r$. Este último hecho implica que $\beta = \lim_{k\to\infty} t_{n_k} \geq r > \beta$. Esta contradicción muestra que debemos tener que $\alpha \leq \beta$. El caso de los límites superiores se verifica de forma similar (□). ■

4.5 Series

Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Vamos a considerar la sucesión de sumas parciales $(s_N(a))_{N\geq 1}$ dada por

$$s_N(a) = s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \in \mathbb{C} \quad \text{para} \quad N \geq 1 \,.$$

Definición 4.49. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que la sucesión de sumas parciales $(s_N(a))_{N\geq 1}$ es la serie de los a_n's la notaremos como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n\geq 1} a_n$$

Decimos que la serie converge en $\mathbb{C}$ si la sucesión $(s_N(a))_{N\geq 1}$ converge en $\mathbb{C}$ dotado de la métrica usual. En este caso, notamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N(a) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \,.$$

Si la sucesión de sumas parciales no converge entonces decimos que la serie diverge. △

Teorema 4.50 (Criterio de Cauchy para series)**.** *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ si y solo si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \,.$$

Demostración. La serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ si y solo si la sucesión de sumas parciales $(s_N)_{N\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ con la métrica usual. Pero la sucesión $(s_N)_{N\geq 1}$ es de Cauchy si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si m, $n \geq n_0$ (y digamos que $m \geq n$)

$$\varepsilon > d(s_m, s_n) = |s_m - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| ,$$

en donde hemos cancelado los términos comunes en las sumatorias del ante-último miembro de arriba. ■

Corolario 4.51. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Si la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración. Por el resultado anterior, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Si $n \geq n_0$ y tomamos $m = n + 1$ entonces

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

Obs 4.52. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Recordemos que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no garantiza que la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$. Por ejemplo, si $a_n = 1/n$, $n \geq 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ pero la serie de los a_n's diverge. △

Proposición 4.53. *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$, $b = (b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{C}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \in \mathbb{C}$. Si $\gamma \in \mathbb{C}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma a_n + b_n) = \gamma\,\alpha + \beta$ o dicho de otra forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma a_n + b_n) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(es decir, converge al valor indicado).

Demostración. Ejercicio (usar la definición de convergencia de series y las propiedades de los límites de sucesiones en $\mathbb{C}$ vistas antes). □

Teorema 4.54. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos no negativos ($a_n \geq 0$, $n \geq 1$). Entonces la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ (a un valor en $\mathbb{R}_{\geq 0}$) si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente. En este caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_N(a) :\ N \geq 1\}\,.$$

Demostración. Notemos que si $1 \leq N \leq M$ entonces

$$s_M - s_N = \sum_{n=1}^{M} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=N+1}^{M} a_n \geq 0 \implies 0 \leq s_N \leq s_M\,.$$

Así, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. En este caso, hemos probado que la sucesión $(s_N)_{N\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ (o equivalentemente en $\mathbb{C}$, porque $\mathbb{R}$ es un subespacio métrico *cerrado* de $\mathbb{C}$) si y solo si está acotada superiormente. Más aún, si la serie converge entonces hemos probado la identidad para calcular el límite (Ver los resultados sobre sucesiones monótonas crecientes). ■

Teorema 4.55 (Criterio de comparación)**.** *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{C}$.*

1. *Si* $|a_n| \leq c_n$, $n \geq 1$ *y la serie de los* c_n*'s converge entonces la serie de los* a_n*'s converge.*

2. *Si* $0 \leq b_n \leq a_n$ *y la serie de los* b_n*'s diverge entonces la serie de los* a_n*'s diverge.*

Demostración. 1. Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m \geq n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \,.$$

Entonces, si $m \geq n \geq n_0$ se tiene que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \,.$$

Lo anterior muestra que la sucesión de sumas parciales de los a_n's es de Cauchy.

2. Si suponemos que la serie de los a_n's converge entonces, por el ítem anterior, concluimos que la serie de los b_n's converge, en contra de la hipótesis. En conclusión, la serie de los a_n's diverge. ■

Lema 4.56. *Sea* $x \in \mathbb{C}$. *Entonces*

1. *Si* $|x| < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$*;*

2. *Si* $|x| > 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} |x^n| = +\infty$.

Demostración. 1. Si $|x| < 1$ entonces existe $p > 0$ tal que $|x| = 1/(p+1)$. Como $p > 0$ entonces (usando el binomio de Newton y notando que los términos de la fórmula son todos positivos)

$$(p+1)^n \geq \binom{n}{1} p \cdot 1^{n-1} = n\,p\,, \quad n \geq 1\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \geq 1$ tal que $0 < 1/n_0 < p \cdot \varepsilon$; si $n \geq n_0$ entonces

$$|x|^n = \left(\frac{1}{p+1}\right)^n \leq \frac{1}{p\,n} \leq \frac{1}{n_0}\,\frac{1}{p} < (p \cdot \varepsilon)\,\frac{1}{p} = \varepsilon\,.$$

2. Si $|x| > 1$ entonces existe $p > 0$ tal que $|x| = p + 1$. Entonces $|x|^n = (1+p)^n \geq n\,p$. Si $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sea $n_0 \geq 1$ tal que $n_0 \geq M/p$. Si $n \geq n_0$ entonces $|x|^n \geq n\,p \geq n_0\,p \geq M$. ■

Teorema 4.57. *Sea* $x \in \mathbb{C}$. *Entonces*

1. *Si* $|x| < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge y* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$.

2. *Si* $|x| \geq 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *diverge.*

Demostración. Si $x \neq 1$ entonces

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1} \implies s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,.$$

Usando el ítem 1. del lema 4.56, junto con propiedades de límites para sumas y cocientes en $\mathbb{C}$, vemos que si $|x| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = (1-x)^{-1}$.

Por otro lado, si $|x| \geq 1$ entonces el término general de la serie, que es x^n, no converge a 0 (notar que $|x^n| = |x|^n \geq 1$). ■

Teorema 4.58. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monótona decreciente ($0 \leq a_{n+1} \leq a_n$, $n \geq 1$). Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la serie $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^j\ a_{2^j}$ converge.*

Demostración. Como se trata de series de términos no negativos, las series convergen si y solo si las sucesiones de sumas parciales están acotadas superiormente. Consideremos las sumas parciales

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{y} \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j\ a_{2^j} \quad \text{para} \quad k,\, n \geq 1\,.$$

Sea $n \geq 1$; sea $k \geq 1$ tal que $n \leq 2^{k+1} - 1$: en este caso

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq \sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} a_j = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j$$

la segunda igualdad se obtiene de haber asociado (de forma conveniente) los términos de la segunda sumatoria: notemos que la segunda sumatoria es sobre el conjunto de índices $A = \{1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$. Podemos escribir a este conjunto de índices como $A = \cup_{\ell=0}^{k} A_\ell$, donde $A_\ell = \{h :\ 2^\ell \leq h \leq 2^{\ell+1} - 1\}$, $0 \leq \ell \leq k$: pero notemos que $A_\ell \cap A_{\ell'} = \emptyset$ si $\ell \neq \ell'$. Entonces sumar sobre los índices de A es lo mismo que sumar (parcialmente) primero sobre los índices de cada A_ℓ, y después sumar todas esas sumas (parciales) porque sumamos ¡todos los términos sin repetir ninguno!

Por hipótesis, $a_{2^\ell} \geq a_j$, $2^\ell \leq j \leq 2^{\ell+1} - 1$ y entonces

$$\sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \leq 2^\ell\, a_{2\ell}$$

porque la sumatoria tiene 2^ℓ términos. Las desigualdades anteriores muestran que

$$s_n \leq \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \leq \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell\, a_{2\ell} = t_k\,.$$

Por otro lado, dado $k \geq 1$ sea $n \geq 1$ tal que $n > 2^k - 1$: notemos que si $\ell \geq 0$ entonces

$$a_{2^{\ell+1}} \leq \frac{1}{2^\ell} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \implies 2^{\ell+1} a_{2^{\ell+1}} \leq 2 \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j$$

porque como cada $a_{2^{\ell+1}} \leq a_j$ para $2^\ell \leq j \leq 2^{\ell+1} - 1$, entonces el *promedio* de estos a_j's supera a $a_{2^{\ell+1}}$. Entonces

$$\begin{aligned} t_k &= \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell\ a_{2^\ell} = a_1 + 2\,a_2 + \sum_{\ell=1}^{k-1} 2^{\ell+1}\ a_{2^{\ell+1}} \leq 2a_1 + 2\,a_2 + 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \\ &= 2\,a_2 + 2 \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j = 2a_2 + 2 \sum_{j=1}^{2^k-1} a_j \leq 2a_2 + 2s_n\,. \end{aligned}$$

Notemos que las dos estimaciones anteriores muestran que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ está acotada si y solo si la sucesión $(t_k)_{k\geq 1}$ está acotada. ■

Teorema 4.59. *La serie* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ *converge si* $p > 1$ *y diverge si* $p \leq 1$.

Demostración. Recordemos que $n^p = e^{p \ln n}$, con lo que $1/n^p = e^{-p \ln n}$, $n \geq 1$. En particular, si $p < 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} 1/n^p = +\infty$, que muestra que la serie diverge. Si $p = 0$ la serie claramente diverge. Supongamos que $p > 0$: en este caso, $(1/n^p)_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona decreciente de términos positivos y podemos aplicar el criterio del resultado anterior: En este caso, tomando $n = 2^k$ entonces $2^k a_{2^k} = 2^k/(2^k)^p = 2^{k(1-p)}$, $k \geq 0$. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge si y solo si} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k \quad \text{converge}\,.$$

Notemos que $0 < 2^{1-p} < 1$ si $p > 1$ mientras que $2^{1-p} \geq 1$ si $0 < p \leq 1$. Las observaciones anteriores junto con el Teorema 4.57 (sobre la convergencia de las series geométricas) muestran que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$. ■

En lo que sigue vamos a formalizar los criterios de la raíz y de la razón para la convergencia de series.

Teorema 4.60 (Criterio de la raíz)**.** *Sea* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión en* $\mathbb{C}$ *y sea*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq 0\,.$$

1. *Si* $\alpha < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
2. *Si* $\alpha > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
3. *Si* $\alpha = 1$ *entonces el criterio no da información sobre la serie.*

Demostración. Supongamos que $\alpha < 1$ y sea $\alpha < \beta < 1$. Por las propiedades del límite superior, existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n|^{1/n} < \beta$, con lo que $|a_n| < \beta^n$. Como $0 < \beta < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ converge. Por el criterio de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge. Pero entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge (□).

Supongamos que $\alpha > 1$: entonces existe una subsucesión $(|a_{n_k}|^{1/n_k})_{k\geq 1}$ que converge a α. En este caso, existe un $k_0 \geq 1$ tal que $|\alpha - |a_{n_k}|^{1/n_k}| < \alpha - 1$ que muestra que $1 \leq |a_{n_k}|^{1/n_k}$ (□). Pero en este caso, $1 \leq |a_{n_k}|$, para $k \geq k_0$. De esta forma, el límite de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no es cero (porque hemos hallado una subsucesión que no converge a 0). Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

Para finalizar damos ejemplos de dos series para las cuales $\alpha = 1$, pero una converge y ¡la otra diverge! El primer ejemplo es $\sum_{n\geq 1} 1/n$: por el resultado anterior esta serie diverge. Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} (1/n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1\,.$$

En efecto, como $0 < (1/n)^{1/n} < 1$ entonces existe $0 < x_n$ tal que $(1/n)^{1/n} = 1/(1+x_n)$. En este caso, $x_n = n^{1/n} - 1$ y luego (usando el binomio de Newton)

$$n = (x_n + 1)^n \geq x_n^2 n(n-1)/2\,.$$

Lo anterior muestra que $0 < x_n \leq 2/(n-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Así, $(1/n)^{1/n} = 1/(1+x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Por otra parte, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge (por el resultado anterior) y verifica que

$$|1/n^2|^{1/n} = (1/n)^{1/n}\,(1/n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot 1 = 1.$$

Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} (1/n)^{1/n} = 1 \implies 1 = 1/1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n}\,.$$

Esto lo mencionamos porque lo vamos a usar más adelante. ■

Teorema 4.61 (Criterio de la razón)**.** *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, y sea*

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,.$$

1. *Si $\gamma < 1$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

2. *Si existe $n_0 \geq 1$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, $n \geq n_0$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demostración. Supongamos que $\gamma < 1$ y sea $\gamma < \beta < 1$. Entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$. En particular

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| < \beta \implies |a_{n_0+1}| < \beta |a_{n_0}|\,.$$

Si suponemos que $k \geq 1$ satisface $|a_{n_0+k}| < \beta^k |a_{n_0}|$ (lo anterior dice que esto vale para $k = 1$) entonces

$$\left|\frac{a_{n_0+(k+1)}}{a_{n_0+k}}\right| < \beta \implies |a_{n_0+(k+1)}| < \beta |a_{n_0+k}| < \beta\,\beta^k |a_{n_0}| = \beta^{k+1} |a_{n_0}|\,.$$

Por inducción la desigualdad vale para todo $k \geq 1$. Como $0 < \beta < 1$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n_0}|\,\beta^n$ converge. Por el criterio de comparación concluimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge; entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Supongamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, $n \geq n_0$. Con un argumento similar al hecho en la primera parte de la prueba concluimos que en este caso,

$$|a_{n_0+k}| \geq |a_{n_0}| > 0 \quad \text{para todo} \quad k \geq 1\,.$$

Lo anterior muestra que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no converge a cero, y la serie no converge. ■

Ejemplo 4.62. El criterio de la raíz puede ser más útil al momento de determinar la convergencia de series. Consideramos el siguiente ejemplo: sea $(a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión determinada por los siguientes casos: si n es impar entonces $a_n = 2^{-(n+1)/2}$ y si n es par, entonces $a_n = 3^{-n/2}$. En este caso la sucesión es

$$1/2\,,\ 1/3\,,\ 1/2^2\,,\ 1/3^2\,,\ 1/2^3\,,\ 1/3^3\,,\ \ldots$$

Después de alguna reflexión, podemos ver que

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{(n+1)}{2n+1}}} = \frac{1}{2^{1/2}} < 1\,.$$

El criterio de la raíz indica que la serie converge. Si ahora aplicamos el criterio de la razón, notamos que (después de reflexionar un rato...)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty\,.$$

Sin embargo, este resultado no permite aplicar el criterio de la razón para series divergentes. En efecto, dicho criterio requiere que exista n_0 tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Esta condición no se cumple en nuestro ejemplo, ya que, para los índices impares, tenemos

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < 1 \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

Por lo tanto, existen infinitos índices n para los cuales

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

y no puede existir un n_0 a partir del cual todos los cocientes sean mayores o iguales que 1. Así, el criterio de la razón no permite decidir la convergencia de esta serie, mientras que el criterio de la raíz sí permite concluir que la serie converge. △

En particular, el caso anterior muestra que el criterio de la razón no da información si el límite superior de los cocientes es mayor o igual que uno.

Teorema 4.63. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \quad y \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq 0\,.$$

Demostración. Vamos a probar la segunda desigualdad (notemos que esta desigualdad dice que siempre que el criterio de la razón determina la convergencia de la serie entonces el criterio de la raíz también lo hace). Sea $\gamma = \limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Si $\gamma = +\infty$ (como en el ejemplo anterior) entonces no hay nada que probar. En otro caso, $\gamma \in \mathbb{R}$ (y $\gamma \geq 0$). Sea $\beta > \gamma$ y sea $n_0 \geq 1$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$ para todo $n \geq n_0$. Si $n > n_0$ entonces $n = n_0 + p$ con $p \geq 1$. Notemos que

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| < \beta \implies |a_{n_0+1}| < \beta\,|a_{n_0}|$$

y si suponemos que $|a_{n_0+k}| < \beta^k |a_{n_0}|$ con $1 \leq k < p$ (lo anterior dice que vale con $k = 1$) entonces

$$\left|\frac{a_{n_0+k+1}}{a_{n_0+k}}\right| < \beta \implies |a_{n_0+k+1}| < \beta\,|a_{n_0+k}| < \beta^{k+1}\,|a_{n_0}|.$$

Entonces, en particular, $|a_n| = |a_{n_0+p}| < \beta^p |a_{n_0}| = \beta^{n-n_0}|a_{n_0}| = \beta^n \frac{|a_{n_0}|}{\beta^{n_0}}$, con $n > n_0$. Así, vemos que

$$|a_n|^{1/n} \leq \beta \left(\frac{|a_{n_0}|}{\beta^{n_0}}\right)^{1/n} \qquad \text{para} \qquad n > n_0\,.$$

Sea $n_1 \geq \max\left\{n_0\,,\, \frac{|a_{n_0}|}{\beta^{n_0}}\right\}$: si $n \geq n_1$ entonces

$$|a_n|^{1/n} \leq \beta \left(\frac{|a_{n_0}|}{\beta^{n_0}}\right)^{1/n} \leq \beta\ (n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta\,.$$

Así, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \beta\ n^{1/n} = \beta$ (donde usamos que existe $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$). Como $\beta > \gamma$ era arbitrario, vemos que $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq \gamma$. La demostración de la primera desigualdad es un ejercicio □. ■

Definición 4.64. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. △

Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Entonces, usando el criterio de comparación (de forma trivial: $|a_n| \leq |a_n|$) concluimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{C}$ (¡convergencia absoluta implica convergencia!).

Por otro lado si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, pero no converge absolutamente, entonces decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge *condicionalmente*.

Proposición 4.65 (Criterio de Leibnitz para series alternantes)**.** *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que*

1. $|a_n| \geq |a_{n+1}|$, $n \geq 1$.
2. $a_{2n-1} \geq 0$ *y* $a_{2n} \leq 0$ *para* $n \geq 1$.
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea n_0 tal que $|a_n| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Sean $M \geq N \geq n_0$ y consideramos $\sum_{n=N+1}^{M} a_n$, según los casos:

Por ejemplo, si $M - N = 2r + 1$ es impar y $N = 2k$ es par: entonces $a_{N+1} \geq 0$ y $-a_{2n} \geq a_{2n+1}$ implica que $0 \geq a_{2n} + a_{2n+1}$, $n = k+1, ..., k+r$. Así,

$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n = a_{N+1} + \sum_{n=k+1}^{k+r} (a_{2n} + a_{2n+1}) \leq a_{N+1} < \varepsilon \,.$$

De forma similar, $a_{2n+1} + a_{2(n+1)} \geq 0$ y $a_M = a_{2(k+r)+1} \geq 0$. Así

$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n = \sum_{n=k}^{k+r-1} (a_{2n+1} + a_{2(n+1)}) + a_M \geq 0 \,,$$

donde hemos usado que el último término así como la sumatoria son no negativos. En este caso hemos probado que

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{M} a_n < \varepsilon \implies \left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n \right| < \varepsilon \,.$$

Los (¡muchos!) demás casos se tratan de forma similar (□). Por el criterio de Cauchy la serie es convergente. ■

Obs 4.66. En la proposición anterior podemos intercambiar los signos de los términos pares e impares. Más precisamente, si en lugar de la condición 2. suponemos que

$$a_{2n-1} \leq 0 \qquad \text{y} \qquad a_{2n} \geq 0, \qquad n \geq 1,$$

manteniendo las condiciones 1. y 3., entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

también converge. Esto se deduce de la proposición anterior considerando $-a_n$. Así, para aplicar el criterio de Leibnitz no importa con cuál de los dos signos comienza la sucesión alternante. △

Ejemplo 4.67. Consideramos la sucesión $\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. El criterio de Leibnitz muestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ converge. Pero ya hemos visto que la serie no converge absolutamente. En este caso decimos que la serie converge condicionalmente. △

En algunos casos, uno se ve tentado de reordenar los términos de una sucesión para tratar de calcular la serie correspondiente. Sin embargo, como vemos a continuación, esto puede cambiar el valor de la serie de forma drástica cuando la serie es condicionalmente convergente.

Definición 4.68. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una biyección. Definimos la sucesión reordenada $(a'_n)_{n\geq 1}$ dada por $a'_n = a_{\phi(n)}$, $n \geq 1$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ es un reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (siempre que las series converjan). △

Teorema 4.69. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente. Si $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ entonces existe un reordenamiento $(a'_n)_{n\geq 1}$ con sumas parciales $s'_N = \sum_{n=1}^{N} a'_n$, $N \geq 1$, tal que*

$$\liminf_{N\to\infty} s'_N = \alpha \qquad y \qquad \limsup_{N\to\infty} s'_N = \beta \,.$$

Demostración. Notemos que como la serie converge, entonces sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Para $n \geq 1$ definimos $p_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$ y $q_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$. Notemos que $p_n = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $p_n = 0$ si $a_n < 0$ (a veces notamos $p_n = (a_n)^+$ la parte positiva de a_n). De forma similar, $q_n = -a_n$ si $a_n < 0$ y $q_n = 0$ si $a_n \geq 0$ (y notamos $q_n = (a_n)^-$ la parte negativa). Con las definiciones anteriores, tenemos que

$$p_n,\, q_n \geq 0\,,\; a_n = p_n - q_n\,,\; |a_n| = p_n + q_n \quad \text{para} \quad n \geq 1\,.$$

En este caso las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ son (ambas) divergentes. En efecto, si las dos fueran convergentes, entonces (ver Proposición 4.53) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sería convergente, en contra de la hipótesis. Así, alguna debe ser divergente: si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ es divergente, pero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ es convergente, entonces es sencillo verificar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - q_n)$ es divergente; pero esta última serie coincide con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que es convergente (y un argumento análogo vale cuando asumimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ es convergente y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ es divergente $\square$).

En conclusión: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ son (ambas) divergentes. Como se trata de series de términos no negativos, la divergencia equivale a que la sucesión de sumas parciales no está acotada superiormente. Definimos la sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{N}^*$ de la siguiente forma: $n_1 = \min\{n \geq 1 :\ a_n \geq 0\}$; asumiendo que definimos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ entonces definimos $n_{k+1} = \min\{n \geq n_k + 1 :\ a_n \geq 0\} > n_k$. Notemos que con esta definición, se tiene que si $a_n \geq 0$ entonces existe $k \geq 1$ tal que $n = n_k$.

De forma similar definimos la sucesión estrictamente creciente $(m_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{N}^*$ con la siguiente propiedad: si $a_n < 0$ entonces existe $k \geq 1$ tal que $n = m_k$. Notemos que en este caso

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_k = \sum_{k=1}^{j} a_{n_k} \quad \text{y} \quad -\sum_{k=1}^{m_j} q_k = \sum_{k=1}^{j} a_{m_k} \quad \text{para} \quad j \geq 1\,.$$

(verificar lo anterior con cuidado: hacer algunos ejemplos para darse cuenta por qué valen las identidades). El hecho de que las series de los p's y los q's sean divergentes nos permite garantizar que: para todo $j_0 \geq 1$ vale que

$$\sum_{k=j_0}^{j} a_{n_k} \xrightarrow[j\to\infty]{} +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=j_0}^{j} a_{m_k} \xrightarrow[j\to\infty]{} -\infty\,.$$

Sean $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$: consideramos sucesiones $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ tales que

1. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ en $\mathbb{R}$.
2. $\alpha_n < \beta_n$, $n \geq 1$.

3. $\beta_1 > 0$.

Notemos que siempre podemos construir sucesiones con estas condiciones ($\square$: plantear estrategias para obtener las sucesiones de los α's y β's).

Sea $r_1 \geq 1$ el natural $r \in \mathbb{N}^*$ más chico tal que

$$x_1 = \sum_{k=1}^{r} a_{n_k} > \beta_1 \ (> \alpha_1)\,.$$

Notemos que r_1 está bien definido, por las condiciones anteriores. Sea $s_1 \geq 1$ el natural $s \in \mathbb{N}^*$ más chico tal que

$$y_1 = x_1 + \sum_{k=1}^{s} a_{m_k} = \sum_{k=1}^{r_1} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s} a_{m_k} < \alpha_1.$$

Entonces s_1 está bien definido (porque $\alpha_1 < \beta_1$ de forma que hay que sumar términos negativos para ir desde arriba de β_1 hasta ¡debajo de α_1!) y

$$y_1 = \sum_{k=1}^{r_1} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_1} a_{m_k} < \alpha_1\,.$$

Continuamos con este proceso: asumiendo que hemos definido $1 \leq r_1 < \ldots < r_j$ y $1 \leq s_1 < \ldots < s_j$ tales que si $0 \leq \ell \leq j-1$ (donde convenimos en definir $s_0 = 0$):

$$\sum_{k=1}^{r_{\ell+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_\ell} a_{m_k} > \beta_{\ell+1} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{r_{\ell+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{\ell+1}} a_{m_k} < \alpha_{\ell+1},$$

entonces partiendo de la segunda desigualdad anterior con $\ell = j-1$ podemos definir r_{j+1} como el natural $r \geq r_j + 1$ más chico tal que

$$\sum_{k=1}^{r} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} > \beta_{j+1} \implies \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} > \beta_{j+1}. \tag{1}$$

Como $\alpha_j < \beta_{j+1}$ entonces $r_{j+1} > r_j$ y está bien definido. Partiendo de la desigualdad anterior podemos definir s_{j+1} como el natural $s \geq s_j + 1$ más chico tal que

$$\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s} a_{m_k} < \alpha_{j+1} \implies \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} < \alpha_{j+1}. \tag{2}$$

De esta forma $s_{j+1} < s_j$ está bien definido porque $\alpha_{j+1} < \beta_{j+1}$. Así quedan definidas las sucesiones $(r_j)_{j\geq 1}$ y $(s_j)_{j\geq 1}$.

Notemos que por definición de $r_{j+1} \geq r_j + 1$ (es el mínimo que satisface cierta desigualdad, de forma que índices anteriores ¡no puede satisfacer la misma desigualdad!),

$$\sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=r_j+1}^{r} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \beta_{j+1} \quad \text{para} \quad r_j + 1 \leq r \leq r_{j+1} - 1\,. \tag{3}$$

En particular, tomando $r = r_{j+1} - 1$ arriba,

$$\sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}-1} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} = \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} - a_{n_{r_{j+1}}} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \beta_{j+1}. \tag{4}$$

Este hecho junto con la desigualdad en la ecuación (1) muestran que

$$\left|\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} - \beta_{j+1}\right| \leq a_{n_{r_{j+1}}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{5}$$

De forma análoga, por la definición de s_{j+1}

$$\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} + \sum_{k=s_j+1}^{s} a_{m_k} \geq \alpha_{j+1} \quad \text{para} \quad s_j + 1 \leq s \leq s_{j+1} - 1\,. \tag{6}$$

En particular, tomando $s = s_{j+1} - 1$ entonces (argumentando como antes):

$$\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} - a_{m_{s_{j+1}}} \geq \alpha_{j+1} \implies \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} \geq \alpha_{j+1} + a_{m_{s_{j+1}}}. \tag{7}$$

Usando este hecho y la desigualdad la ecuación (2) vemos que

$$\left|\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} - \alpha_{j+1}\right| \leq a_{m_{s_{j+1}}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{8}$$

Definimos la biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ como sigue: definimos $r_0 = 0$ (recordemos $s_0 = 0$) y si $h \in \mathbb{N}^*$ entonces se pueden dar dos casos:

Caso 1: existe $j \geq 0$ tal que $r_j + s_j + 1 \leq h \leq r_{j+1} + s_j$ y definimos $\phi(h) = n_{h-s_j}$.

Caso 2: existe $j \geq 0$ tal que $r_{j+1} + s_j + 1 \leq h \leq r_{j+1} + s_{j+1}$ y definimos $\phi(h) = m_{h-r_{j+1}}$.

De esta forma ϕ resulta una biyección (□).

Se verifica por inducción que: dado $h \in \mathbb{N}^*$ entonces

Si vale el caso 1: entonces

$$\{\phi(1), \ldots, \phi(h)\} = \{n_k : \ 1 \leq k \leq h - s_j\} \cup \{m_k : \ 1 \leq k \leq s_j\}$$

(□). En este caso, usando la ecuación (7) (primero) y (3), (4) (después)

$$\alpha_j + a_{m_{s_j}} \leq \sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \sum_{n=1}^{h} a_{\phi(n)} = \sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=r_j+1}^{h-s_j} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \beta_{j+1} + a_{n_{r_j+1}}. \tag{9}$$

Si vale el caso 2: entonces

$$\{\phi(1), \ldots, \phi(h)\} = \{n_k : \ 1 \leq k \leq r_{j+1}\} \cup \{m_k : \ 1 \leq k \leq h - r_{j+1}\}$$

(□). En este caso, usando la ecuación (4) (primero) y (6), (7) (después)

$$\beta_{j+1} + a_{n_{r_j+1}} \geq \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \geq \sum_{n=1}^{h} a_{\phi(n)} = \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{h-r_{j+1}} a_{m_k} \geq \alpha_{j+1} + a_{m_{s_{j+1}}}. \tag{10}$$

Usando que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ en $\mathbb{R}$, entonces las ecuaciones (9) y (10) muestran que las sumas parciales de este reordenamiento verifican

$$\liminf_{n\to\infty} s'_N \geq \alpha \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} s'_N \leq \beta\,,$$

donde esta última verificación es un ejercicio elaborado (□). Más aún, eligiendo $h_1 = r_{j+1} + s_j$ y $h_2 = r_{j+1} + s_{j+1}$, los hechos anteriores junto con las ecuaciones (5) y (8) muestran que

$$|s'_{h_1} - \beta_{j+1}| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \text{y} \quad |s'_{h_2} - \alpha_{j+1}| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

de forma que

$$\liminf_{n\to\infty} s'_N = \alpha \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} s'_N = \beta\,.$$

■

Teorema 4.70. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que converge absolutamente y sea $\sum_{n\geq 1} a_n = \ell$. Si $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ es una biyección entonces la serie asociada a este reordenamiento converge y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$: por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $M \geq N \geq n_0$ entonces $\sum_{n=N+1}^{M} |a_n| < \varepsilon/4$. Sea $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una biyección: sea $p_0 = \max\{\phi^{-1}(1), \ldots, \phi^{-1}(n_0)\} \geq n_0$: así, si $1 \leq n \leq n_0$ existe $1 \leq h \leq p_0$ tal que $\phi(h) = n$. Entonces $\{1, \ldots, n_0\} \subseteq \{\phi(1), \ldots, \phi(p_0)\}$. Si $N \geq p_0$ entonces los términos de la forma a_n, $1 \leq n \leq n_0$ aparecen en las dos sumas parciales

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{y} \quad s'_N = \sum_{n=1}^{N} a_{\phi(n)} \implies |s_N - s'_N| \leq 2 \sum_{n=n_0+1}^{M} |a_n| < \varepsilon/2\,,$$

donde $M = \max\{p_0, \phi(1), \ldots, \phi(p_0)\}$ (□). Por otro lado, sea $n_1 \geq 1$ tal que $|s_N - \ell| < \varepsilon/2$ si $N \geq n_1$: si $N \geq \max\{p_0, n_1\}$ entonces

$$|s'_N - \ell| \leq |s'_N - s_N| + |s_N - \ell| < \varepsilon\,.$$

■

Corolario 4.71. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ con la siguiente propiedad: existe $\ell \in \mathbb{C}$ tal que para toda biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$ (converge a ℓ en $\mathbb{C}$). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*

Demostración. Ejercicio (Sugerencia: notar que si la serie no converge absolutamente, entonces o bien la serie de la sucesión de partes reales $(\Re(a_n))_{n\geq 1}$ o bien la serie de la sucesión de partes imaginarias $(\Im(a_n))_{n\geq 1}$ no converge absolutamente. Como ambas series convergen, en este caso se puede aplicar el resultado sobre reordenamientos de series reales condicionalmente convergentes a alguna de ellas). □

Para finalizar este capítulo, mencionamos que una serie que verifica que existe $\ell \in \mathbb{C}$ tal que para toda biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$ se dice *incondicionalmente convergente*. Si miramos los enunciados los dos último resultados, veremos que en el caso de series en $\mathbb{C}$, convergencia absoluta equivale a convergencia incondicional (pero en espacios normados de dimensión infinita esta equivalencia ¡no vale en general!).

4.6 Series de potencia

En lo que sigue formalizamos algunos hechos relacionados con series de potencias (con coeficientes complejos, y en donde dejamos que la variable varía en $\mathbb{C}$).

Definición 4.72. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. La serie de potencias compleja con coeficientes $(a_n)_{n\geq 0}$ es la expresión (¡formal!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,.$$

En este contexto, z es considerada una indeterminada (o variable). △

El problema asociado a una serie de potencias es el de determinar el dominio natural de la serie: es decir, el conjunto de números complejos $w \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n$ converge en $\mathbb{C}$. El siguiente resultado indica que el dominio natural de una serie de potencias tiene forma de disco en el plano complejo, aunque el comportamiento sobre la frontera puede ser diferente.

Teorema 4.73. *Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq 0$. Definimos el radio de convergencia de la serie, notado R, dado por*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = +\infty; \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{si } 0 < \alpha < +\infty; \\ +\infty & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n$ converge absolutamente para $|w| < R$ mientras que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n$ diverge si $|w| > R$.

Demostración. Sea $w \in \mathbb{C}$ y apliquemos el criterio de la raíz a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n w^n|$: en este caso consideramos $|a_n w^n|^{1/n} = |a_n|^{1/n}\, |w|$; así

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n w^n|^{1/n} = |w| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = |w|\, \alpha\,.$$

Entonces $|w|\,\alpha < 1$ si y solo si $|w| < R$ y en este caso la serie converge absolutamente. Por otro lado, si aplicamos el criterio de la raíz para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ vemos que $|w|\,\alpha > 1$ si y solo si $|w| > R$ y en este caso la serie diverge. ■

4.7 Ejercicios del texto

4.1. Probar que si una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X diverge entonces, para todo $p \in X$ debe existir $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ tal que: para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(p, x_n) > \varepsilon$.

4.2. Probar el siguiente ítem del Teorema 4.4: Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X. Probar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X entonces es acotada.

4.3. Probar que la noción de convergencia solo depende de τ_d. Es decir, si d_1 y d_2 son dos métricas en X débilmente equivalentes es decir, $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ entonces: dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X y dado $p \in X$ vale que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en (X, d_1) si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en (X, d_2).

4.4. Completar la demostración del Teorema 4.6: Supongamos que $(s_n)_{n\geq 1}$, $(t_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{C}$. Probar que

1. Si $c \in \mathbb{C}$ entonces $\lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \cdot s \in \mathbb{C}$ y $\lim_{n\to\infty} c + s_n = c + s \in \mathbb{C}$.
2. $\lim_{n\to\infty} (s_n \cdot t_n) = s \cdot t$.
3. $\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}$.

4.5. Completar la demostración del Teorema 4.8: Consideremos $(\mathbb{R}^k, d_k)$ con su métrica (euclídea) usual. Sean $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{R}^k$, y sea $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ sucesión en $\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}^k \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Demostrar lo siguiente:

1. $\lim_{n\to\infty} \gamma_n \cdot x_n = \gamma \cdot x \in \mathbb{R}^k$.
2. $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$.

4.6. Completar la demostración del Teorema 4.17: Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K (es decir, $x_n \in K$, $n \geq 1$). Demostrar que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a un punto en K.

4.7. Demostrar la observación 4.22: Sea (X, d) EM y sea $A \subseteq X$ no vacío. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $\operatorname{diam}(A) = \infty$ si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existen $x, y \in A$ tales que $d(x, y) \geq n$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
3. Si $\operatorname{diam}(A) < r < \infty$ y $x \in A$ entonces $A \subseteq B_r(x)$.
4. Si $r > 0$ y $x \in X$ entonces $\operatorname{diam}(B_r(x)) \leq 2r$.
5. A es acotado si y solo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

4.8. Probar que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ está acotada (en el sentido de espacios métricos) si y solo si está acotada superiormente e inferiormente a la vez.

4.9. Probar que una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ que es monótona creciente siempre está acotada inferiormente. De forma similar, Probar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ es monótona decreciente entonces está acotada superiormente.

4.10. Completar la demostración del Teorema 4.35: Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona decreciente en $\mathbb{R}$. Probar que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ si y solo si es acotada.

4.11. Completar la demostración de la Observación 4.36: Probar que si $(s_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ entonces $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a $\inf\{s_n : \ n \geq 1\}$.

4.12. Demostrar la observación 4.38:

1. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Probar que $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada superiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

2. De forma similar, $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada inferiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

4.13. Completar la demostración de la observación 4.40: Demostrar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \overline{\mathbb{R}}$ y existen $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ y $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \geq \alpha$ para $n \geq n_0$ entonces $p \geq \alpha$.

4.14. Completar la demostración de la Proposición 4.33: Sea (X, d) un EM completo y sea $E \subseteq X$ cerrado. Probar que el subespacio métrico (E, d_E) es completo.

4.15. Probar las siguientes igualdades:

$$\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

4.16. Completar la demostración del Teorema 4.45: Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Probar lo siguiente:

LS1.. Existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

LS2.. Si $\alpha > \limsup_{n\to\infty} x_n$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n < \alpha$, $n \geq n_0$.

De forma similar

LI1.. Existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \to_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

LI2.. Si $\alpha < \liminf_{n\to\infty} x_n$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n > \alpha$, $n \geq n_0$.

Además, las propiedades LS1. y LS2. (respectivamente LI1. y LI2.) caracterizan a $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (respectivamente $\liminf_{n\to\infty} x_n$) en $\overline{\mathbb{R}}$.

4.17. Completar la demostración del Teorema 4.47: Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:

1. $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$;
2. $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

4.18. Completar la demostración del Teorema 4.48: Sean s_n, $t_n \in \mathbb{R}$ tales que $s_n \leq t_n$, $n \geq 1$. Probar que,

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n\,.$$

4.19. Demostrar la Proposición 4.53: Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$, $b = (b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{C}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \in \mathbb{C}$. Probar que si $\gamma \in \mathbb{C}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma a_n + b_n) = \gamma\,\alpha + \beta$ o dicho de otra forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma a_n + b_n) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(es decir, converge al valor indicado).

4.20. Completar la demostrar del Teorema 4.60 (Criterio de la raíz): Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq 0\,.$$

Demostrar:

1. Si $\alpha < 1$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $\alpha > 1$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Si $\alpha = 1$ entonces el criterio no da información sobre la serie.

4.21. Completar la demostración del Teorema 4.63: Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Probar que

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

4.22. Completar la demostración de la Proposición 4.65 (Criterio de Leibnitz para series alternantes): Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que

1. $|a_n| \geq |a_{n+1}|$, $n \geq 1$.
2. $a_{2n-1} \geq 0$ y $a_{2n} \leq 0$ para $n \geq 1$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

4.23. Completar la demostración del Teorema 4.69: Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente. Si $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ entonces probar que existe un reordenamiento $(a'_n)_{n\geq 1}$ con sumas parciales $s'_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a'_n$, $N \geq 1$, tal que

$$\liminf_{N\to\infty} s'_N = \alpha \quad \text{y} \quad \limsup_{N\to\infty} s'_N = \beta\,.$$

4.24. Completar la demostración del Teorema 4.70: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que converge absolutamente y sea $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = \ell$. Si $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ es una biyección probar que la serie asociada a este reordenamiento converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$.

4.25. Demostrar el Corolario 4.71: Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ con la siguiente propiedad: existe $\ell \in \mathbb{C}$ tal que para toda biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$ (converge a ℓ en $\mathbb{C}$). Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

4.8 Ejercicios nuevos

4.26. Probar los siguientes límites usando la definición. Se considera $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

a) $\dfrac{3-2n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -2.$

b) $\dfrac{2^n-3}{2^n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

c) $\dfrac{n^5-6n}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

4.27. Considerar (x_n), (y_n) y (z_n) sucesiones en $\mathbb{R}$ tales existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq N$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ y $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ entonces $l \leq s$.

b) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ y $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ entonces $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

c) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ entonces $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

d) Si $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ entonces $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

4.28. En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, demostrar que si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ entonces $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|$. Mostrar que vale la recíproca solamente en el caso $a = 0$.

4.29. Sean (X, d) un EM y $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente a x. Demostrar que para cualquier $p \in X$ se cumple $d(x_n, p) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x, p)$ (considerando la topología usual de $\mathbb{R}$).

4.30. Sea $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Se define $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Probar que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ¿Puede decirse lo mismo para $z_n = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

4.31. Demostrar las siguientes afirmaciones considerando $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

a) Si $p > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0.$

b) Si $p > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

d) Si $p > 0$ y α es un número real entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0.$

e) Si $|x| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0.$

4.32. Hallar los límites subsecuenciales de las siguientes sucesiones y determinar cuáles sucesiones convergen.

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}.$

b) $z_n = i^n.$

c) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es primo} \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{caso contrario} \end{cases}$.

4.33. Dar sucesiones cuyo conjunto de límites subsecuenciales sean

a) $\{1, 2, 3\}$.

b) $\mathbb{Z}$.

4.34. Si $s_1 = 2$ y $s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}$, probar que $s_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge.

4.35. Demostrar que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente y no acotada superiormente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4.36. Considerar $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en (X, d) un EM. Demostrar que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x si y solo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a x.

4.37. Considerar $(x_n)_{n\geq 1}$ en un espacio métrico. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demostrar los enunciados verdaderos y buscar contraejemplos para los falsos.

a) Si $x_{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$ y $x_{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$ entonces $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} L$.

b) Si $(x_{2k})_{k\geq 1}$, $(x_{2k+1})_{k\geq 1}$ y $(x_{3k})_{k\geq 1}$ son convergentes entonces $(x_k)_{k\geq 1}$ converge.

4.38. Dada $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$, se llama término destacado a un x_p tal que $x_p \geq x_n$ para todo $n \geq p$. Considerar $P = \{p : x_p \text{ es término destacado}\}$.

a) Si P es infinito entonces considerar $P = \{p_1 < p_2 < \ldots\}$ entonces $(x_{p_k})_{k\geq 1}$ es una subsucesión decreciente.

b) Si P es finito entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión creciente.

Conclusión: toda sucesión tiene una subsucesión monótona.

4.39. Supongamos que (p_n) y (q_n) son sucesiones de Cauchy en un EM (X, d). Probar que la sucesión $\big(d(p_n, q_n)\big)$ converge.

Sugerencia: Usar la desigualdad $d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$ para ver que la sucesión en cuestión es de Cauchy.

4.40. Supongamos que (x_n) es una sucesión en un EM (X, d) que satisface la siguiente condición: para todo $p \in \mathbb{N}^*$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$. ¿Es necesariamente (x_n) una sucesión de Cauchy? Justificar.

4.41. Sea (X, d) un EM. Demostrar:

a) Si (X, d) es completo y (p_n) una sucesión en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} d(p_n, p_{n+1})$ converge entonces (p_n) converge.

b) Si (p_n) es una sucesión que converge a un $p \in X$ entonces

$$d(p_1, p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} d(p_n, p_{n+1}).$$

Observar que la afirmación es verdadera incluso en el caso que la serie (de términos no negativos) sea divergente.

4.42. Sea (x_n) una sucesión en (X, d) un EM completo tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r\, d(x_{n-1}, x_n),$$

donde $0 < r < 1$. Probar que (x_n) es una sucesión convergente.

4.43. Sea (X, d) un EM y sean A y B dos subconjuntos de X no vacíos.

a) Probar que si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

b) Usar el ítem anterior para probar que la unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.

c) Dar un ejemplo donde $A \cap B = \emptyset$ y $\operatorname{diam}(A \cup B) > \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

4.44. Para un espacio métrico M probar que son equivalentes:

1. M es completo.
2. Para toda sucesión descendiente $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ de conjuntos no vacíos cerrados, tales que
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0,$$
la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ es no vacía.

Sugerencia: Para una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, los conjuntos $A_j = \{x_n : n \geq j\}$ forman una sucesión de conjuntos descendiente. Tomar $B_j = \overline{A_j}$ el cual es un conjunto cerrado.

4.45. Hallar el límite superior e inferior de la sucesión (s_n) definida por

$$s_1 = 0; \qquad s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}; \qquad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$

4.46. Dada una (x_n) una sucesión de números reales. Se definen

$$m_n = \inf_{i\geq n}\{x_i\} \quad \text{y} \quad M_n = \sup_{i\geq n}\{x_i\}.$$

Demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} m_n = \sup_{n\geq 1}\{m_n\} := \sup_{n\geq 1}\{\inf_{i\geq n} x_i\}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \inf_{n\geq 1}\{M_n\} := \inf_{n\geq 1}\{\sup_{i\geq n} x_i\}.$$

4.47. Dadas (a_n) y (b_n) sucesiones acotadas de números reales. Demostrar que

a) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

b) $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$.

Si además se pide que $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, entonces

c) $\liminf(a_n.b_n) \geq \liminf a_n . \liminf b_n$.

d) $\limsup(a_n.b_n) \leq \limsup a_n . \limsup b_n$.

Dar ejemplos donde las cuatro desigualdades anteriores sean estrictas.

4.48. (*) Considerar (a_n) una sucesión acotada de números reales. Se define

$$\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

a) Mostrar que $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

b) Mostrar que si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ entonces $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

c) Buscar un ejemplo donde (a_n) no sea convergente y (σ_n) sea convergente.

4.49. Analizar la convergencia y/o la convergencia absoluta de las series dadas:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{(n+1)}}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2+(-1)^n)}{2^n}$.

4.50. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+i^n}{n^2}z^n$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{3^n}z^n$.

4.51. Considerar $a_n \geq 0$. Probar que la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

4.52. Probar que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ también converge. Mostrar que no es cierta la recíproca con un contraejemplo.

4.53. Considerar $a_n > 0, b_n > 0$ tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, para $0 < c < \infty$. Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ ¿Qué sucede si $c = 0$ o si $c = \infty$?

4.54. Considerar $a_n > 0$ y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Sea $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$.

a) Probar que $\frac{a_m}{r_m} + \ldots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$ si $m < n$ y deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ diverge.

b) Probar que $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$, y deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ converge.

4.55. Considerar (a_n) una sucesión de números complejos y (b_n) una sucesión de números reales tales que

a) Las sumas parciales $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ están acotadas;

b) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$

c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.

4.56. Sea $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ y $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) Mostrar que $0 < L < \infty$.

b) Dar un reordenamiento $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = L/2$.

c) Dar un reordenamiento $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \infty$.

5 Continuidad en espacios métricos

En este capítulo vamos a desarrollar las nociones de límite y continuidad para funciones entre espacios métricos. Más adelante vamos a usar estas nociones en contextos más específicos (de dominios compactos o conexos) para formalizar varios resultados fundamentales del análisis.

5.1 Límites de funciones entre espacios métricos

Obs 5.1. Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$. Recordemos que si $p \in E'$ entonces para todo $\delta > 0$ se tiene que

$$(B_\delta(p) \setminus \{p\}) \cap E = \{x \in E : \ 0 < d(p, x) < \delta\} \neq \emptyset\,.$$

En particular, este hecho nos ha permitido construir una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E con las siguientes dos propiedades: $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. △

Definición 5.2. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $E \subseteq X$. Sea $f : E \to Y$ una función y sea $p \in E'$ un punto límite de E. Decimos que existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende p, si existe $q \in Y$ tal que: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que si

$$x \in E \quad \text{y} \quad 0 < d_X(p, x) < \delta \quad \text{entonces} \quad d_Y(q, f(x)) < \varepsilon\,.$$

En este caso notamos $\lim_{x\to p} f(x) = q$. △

Obs 5.3. Con las notaciones de la definición anterior: notemos que

1. p puede no ser elemento de E;
2. Si $p \in E$ entonces puede que $\lim_{x\to p} f(x) = q \neq f(p)$.

△

Teorema 5.4. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $E \subseteq X$. Sean $f : E \to Y$ una función, $p \in E'$ un punto límite de E y $q \in Y$. Entonces $\lim_{x\to p} f(x) = q$ si y solo si: para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ en (X, d_X), se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$ en (Y, d_Y).*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to p} f(x) = q$ y sea sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ en (X, d_X). Consideramos la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ en Y: dado $\varepsilon > 0$ entonces, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E$ y $0 < d_X(p, x) < \delta$ vale que $d_Y(q, f(x)) < \varepsilon$. Usando este $\delta > 0$, concluimos que existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d_X(p, x_n) < \delta$. Como $x_n \neq p$ para $n \geq 1$ entonces, si $n \geq n_0$

$$0 < d_X(p, x_n) < \delta \implies d_Y(q, f(x_n)) < \varepsilon\,.$$

Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$ en (Y, d_Y).

Supongamos ahora que NO se verifica que $\lim_{x\to p} f(x) = q$: si negamos la Definición 5.2 (¡teniendo cuidado con la lógica!) entonces concluimos que debe existir $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ vale que existe $e_\delta \in E$ tal que $0 < d_X(p, e_\delta) < \delta$ y $d_Y(q, f(e_\delta)) \geq \varepsilon$. Así, dado $n \geq 1$ podemos considerar $x_n = e_{1/n} \in E$: de esta forma, construimos la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $0 < d_X(p, x_n) < 1/n$ (y en particular $x_n \neq p$, $n \geq 1$) y $d_Y(q, f(x_n)) \geq \varepsilon$. Notemos que entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ pero NO vale que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$.

■

Corolario 5.5 (Unicidad de límites)**.** *Con las notaciones del teorema anterior: si* $\lim_{x\to p} f(x) = q$ *y* $\lim_{x\to p} f(x) = q'$ *entonces* $q = q'$.

Demostración. Recordemos que hemos probado la unicidad de límites de sucesiones. El corolario es entonces una consecuencia de la Observación 5.1 y del Teorema 5.4 (□). ■

Obs 5.6. Sea (X, d) un EM, $E \subseteq X$ y sean $f, g : E \to \mathbb{C}$ funciones. Dado $b \in \mathbb{C}$ podemos definir $f + b\,g : E \to \mathbb{C}$ dada por $(f + b\,g)(x) = f(x) + b\,g(x) \in \mathbb{C}$, $x \in E$.

De forma similar, definimos $f \cdot g : E \to \mathbb{C}$ dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{C}$, $x \in E$. Finalmente, si $g(x) \neq 0$ para $x \in E$ entonces queda definida $f/g : E \to \mathbb{C}$ dada por $(f/g)(x) = f(x)/g(x) \in \mathbb{C}$, $x \in E$. △

Teorema 5.7. *Sea* (X, d) *un EM,* $E \subseteq X$ *y consideramos* $\mathbb{C}$ *con la métrica usual. Sean* $f, g : E \to \mathbb{C}$ *y* $p \in E'$ *tales que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = z \in \mathbb{C} \quad y \quad \lim_{x\to p} g(x) = w \in \mathbb{C}\,.$$

Entonces

1. $\lim_{x\to p}(f + g)(x) = z + w$.
2. $\lim_{x\to p}(f \cdot g)(x) = z \cdot w$.
3. *Si* $w \neq 0$, *sea* $F = \{x \in E :\ g(x) \neq 0\} \subseteq E$; *entonces* $p \in F'$ *y vale que*

$$\lim_{x\in F,\ x\to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{z}{w}\,.$$

Demostración. Para verificar las afirmaciones anteriores podemos usar el Teorema 5.4 y reducir el problema al estudio de sucesiones. Más aún, recordemos que hemos probado propiedades similares en el caso de sucesiones. Por ejemplo, para probar 1: sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ (como $p \in E'$, la Observación 5.1 muestra que podemos considerar este tipo de sucesiones). Por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z\ ,\ \lim_{n\to\infty} g(x_n) = w \implies \lim_{n\to\infty}(f + g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = z + w\,.$$

Usando nuevamente el Teorema 5.4 vemos que vale 1. La prueba del ítem 2 es similar. Para probar 3. hay que notar que para poder considerar la función cociente f/g hay que restringir el dominio de esta función al conjunto F (donde g no se anula). Si $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ entonces hemos probado que existe $n_0 \geq 1$ tal que $g(x_n) \neq 0$ para $n \geq n_0$ (porque $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = w \neq 0$). Esto muestra que $(x_n)_{n\geq n_0}$ es una sucesión en F tal que $x_n \neq p$, $n \geq n_0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$; esto último permite verificar que $p \in F'$ (□). En este caso, podemos aplicar el argumento con sucesiones para deducir la afirmación de este ítem (□). Para enfatizar que hemos restringido el análisis a F, incluimos esta restricción en la notación del límite. ■

Teorema 5.8. *Sea* (X, d) *un EM,* $E \subseteq X$ *y consideramos* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual. Sean* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *y* $p \in E'$ *tales que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \neq p$ *y*

$$\lim_{x\to p} f(x) = z \in \mathbb{R} \quad y \quad \lim_{x\to p} g(x) = w \in \mathbb{R}\,.$$

entonces $z \leq w$.

Demostración. Suponemos que $z > w$ y tomamos $\varepsilon = (z-w)/2 > 0$. Dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Entonces existen $n_0 \geq 1$ y $n_1 \geq 1$ tales que $|f(x_n) - z| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y $|g(x_n) - w| < \varepsilon$ para $n \geq n_1$. Por lo tanto, para cualquier $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ tendremos $g(x_n) < w + \varepsilon = z - \varepsilon < f(x_n)$ lo cual es absurdo. ■

5.2 Funciones continuas

Comenzamos considerando la noción de continuidad para funciones entre espacios métricos.

Definición 5.9. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función.

1. Dado $p \in X$ decimos que $f(x)$ es continua en p si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que si
$$d_X(p, x) < \delta \quad \text{entonces} \quad d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon\,.$$
2. Decimos que $f(x)$ es una función continua (en X) si $f(x)$ es continua en cada uno de los puntos de X.

△

Obs 5.10. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Sea $p \in X$ y supongamos que p es punto aislado ($p \in \text{Ais}(X)$) es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) = \{p\}$. En este caso, f es continua en p: en efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomando el $\delta > 0$ anterior (que existe porque p es aislado) entonces $d_X(x, p) < \delta$ garantiza que $x = p$ y luego $d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$. △

La observación anterior muestra que el análisis de la continuidad de la función $f(x)$ se puede restringir a los puntos límite.

Teorema 5.11. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Sea $p \in X'$ un punto límite de X. Entonces $f(x)$ es continua en $p \in X$ si y solo si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es continua en $p \in X$. Entonces, por definición, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. Recíprocamente, si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < d_X(p, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Pero como $d_Y(f(p), f(p)) = 0$ (con $x = p$) entonces es claro que si $d_X(p, x) < \delta$ (es decir, o bien $0 < d_X(p, x) < \delta$ o bien $x = p$) entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$. ■

Corolario 5.12. *Sea (X, d) un EM y consideramos $\mathbb{C}$ con la métrica usual. Sean $f, g : X \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $p \in X$. Entonces $(f + g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$ son continuas en $p \in X$. Si $p \in F = \{x \in X : \ g(x) \neq 0\}$ entonces $f/g : F \to \mathbb{C}$ es continua en p.*

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 5.13. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces $f(x)$ es continua en $p \in X$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ en (X, d_X) se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ en (Y, d_Y).*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es continua en p y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, p) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ por hipótesis. Pero en este caso, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d_X(x_n, p) < \delta$ y luego $d_Y(f(x_n), f(p)) < \varepsilon$ (para $n \geq n_0$). Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ en (Y, d_Y).

Por otro lado, si $f(x)$ no es continua en p notemos que p no puede ser un punto aislado. En este caso, $p \in X'$. Por otro lado, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d_X(p, x_\delta) < \delta$ y $d_Y(f(x_\delta), f(p)) \geq \varepsilon$. En este caso, la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ dada por $z_n = x_{1/n} \in X$ verifica que $\lim_{n\to\infty} z_n = p$ pero $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ o bien no existe o bien existe pero es distinto de $f(p)$. ■

Obs 5.14. Sea (X, d) un EM. Recordemos que hemos considerado $\tau_d = \{U \subseteq X : \ U$ es abierto en $X\}$, llamada la topología en X inducida por la métrica d. τ_d es una clase de subconjuntos de X cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas que siempre contiene a X y $\emptyset$.

△

El siguiente resultado muestra que la noción de continuidad de una función es una propiedad *topológica* en el sentido que solo depende de las topologías inducidas por las métricas (y no de las métricas mismas).

Teorema 5.15. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces $f(x)$ es continua (en X) si y solo si: para todo $V \subseteq Y$ abierto en (Y, d_Y) vale que*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : \ f(x) \in V\} \subseteq X$$

es abierto en (X, d_X).

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es continua; sea $V \subseteq Y$ abierto y sea $p \in f^{-1}(V)$, es decir, $f(p) \in V$. Como V es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(f(p)) = \{y \in Y : \ d_Y(f(p), y) < \varepsilon\} \subseteq V \, .$$

Como f es continua en $p \in X$ entonces existe $\delta = \delta(p, \varepsilon) > 0$ tal que si $d_X(p, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Pero entonces,

$$x \in B_\delta(p) \implies d_X(p, x) < \delta \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(p)) \subseteq V \, .$$

Lo anterior muestra que $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$. Es decir, $p \in (f^{-1}(V))^o$ es un punto interior. Como $p \in f^{-1}(V)$ era arbitrario, concluimos que $f^{-1}(V) \subseteq X$ es conjunto abierto.

Recíprocamente, supongamos que siempre que $V \subseteq Y$ es abierto en (Y, d_Y) entonces $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto en (X, d_X). Sea $p \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $V = B_\varepsilon(f(p)) \subseteq Y$ que es abierta. Como $p \in f^{-1}(V)$ (porque $f(p) \in V = B_\varepsilon(f(p))$) entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$; entonces: dado $x \in X$,

$$\begin{aligned} d_X(p, x) < \delta &\implies x \in B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V) \implies f(x) \in V = B_\varepsilon(f(p)) \\ &\implies d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Esto muestra que se verifica la Definición 5.9 y $f(x)$ es continua en $p \in X$. Como p era arbitrario, entonces $f(x)$ es continua. ■

Con las notaciones del resultado anterior, f es continua en X si y solo si

$$f^{-1}(V) \in \tau_{d_X} \, , \, \forall \, V \in \tau_{d_Y} \, .$$

Corolario 5.16. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces $f(x)$ es continua (en X) si y solo si: para todo $F \subseteq Y$ cerrado en (Y, d_Y) vale que $f^{-1}(F) = \{x \in X : \ f(x) \in F\} \subseteq X$ es cerrado en (X, d_X).*

Demostración. Recordemos que la preimagen por cualquier función tiene la siguiente propiedad: si $H \subseteq Y$ entonces $f^{-1}(Y \setminus H) = X \setminus f^{-1}(H)$ ($\square$).

Supongamos que para todo $F \subseteq Y$ cerrado en (Y, d_Y) vale que $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\} \subseteq X$ es cerrado en (X, d_X): si $V \subseteq Y$ es abierto entonces $F := Y \setminus V \subseteq Y$ es cerrado y

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(V) \subseteq X \text{ es cerrado } \implies f^{-1}(V) \subseteq X \text{ es abierto}.$$

Recíprocamente, supongamos que para todo $V \subseteq Y$ abierto en (Y, d_Y) vale que $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \subseteq X$ es abierto en (X, d_X). Si $F \subseteq Y$ es cerrado entonces $V = Y \setminus F \subseteq Y$ es abierto y

$$f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(F) \subseteq X \text{ es abierto } \implies f^{-1}(F) \subseteq X \text{ es cerrado}.$$

El corolario es una consecuencia de la equivalencia previa y del Teorema 5.15. ■

Teorema 5.17. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) EM's y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es función continua entre los EM's (X, d_X) y (Z, d_Z).*

Demostración. Para probar la continuidad de la composición usamos el Teorema 5.15 junto con el siguiente hecho (válido para funciones arbitrarias): si $W \subseteq Z$ entonces

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq X.$$

Así, si $W \subseteq Z$ es abierto, entonces $g^{-1}(W) \subseteq Y$ es abierto, porque g es continua. Pero entonces $f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq X$ es abierto, porque f es continua. Así, hemos probado que $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq X$ es abierto, para $W \subseteq Z$ abierto. El Teorema 5.15 muestra que $g \circ f$ es continua. ■

Obs 5.18. En realidad es posible probar una versión local del teorema anterior, en donde sólo suponemos que las funciones son continuas en puntos (convenientemente elegidos). Concretamente, sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) EM's y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones tales que f es continua en $p \in X$ y g es continua en $f(p) \in Y$. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es función continua en $p \in X$ ($\square$: como sugerencia, argumentar en términos de sucesiones en X que tienden a p). △

Obs 5.19. Sea X un conjunto y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ una función. Recordemos para $1 \leq i \leq k$ podemos definir la función $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_i((x_j)_{j=1}^k) = x_i \in \mathbb{R}$, $(x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$; π_i es la proyección sobre la i-ésima coordenada. Notemos que formalmente,

$$(x_1, \ldots, x_k) = (\pi_1((x_j)_{j=1}^k), \ldots, \pi_k((x_j)_{j=1}^k)) \in \mathbb{R}^k.$$

Podemos definir las funciones coordenadas de la función f, dadas por $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i \leq k$. De esta forma, como $f(x) \in \mathbb{R}^k$,

$$f(x) = (\pi_1(f(x)), \ldots, \pi_k(f(x))) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad x \in X.$$

Lo anterior muestra que las funciones coordenadas de f nos permiten representar a los valores de f. △

Obs 5.20. Sea $1 \leq i \leq k$ y consideremos la proyección sobre la coordenada i-ésima: $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Si $x = (x_j)_{j=1}^k$, $y = (y_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$ entonces

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)|^2 = |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2 = \|x - y\|^2.$$

La estimación anterior permite ver que π_i es una función continua en $\mathbb{R}^k$ según la Definición 5.9 (tomando $\delta = \varepsilon > 0$), $1 \leq i \leq k$. △

Teorema 5.21. *Sea (X, d) un EM, sea $\mathbb{R}^k$ con la métrica (euclídea) usual y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ una función. Para cada $1 \leq i \leq k$, sea $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, la i-ésima función coordenada. Entonces*

1. *f es continua si y solo si f_i es continua, $1 \leq i \leq k$.*
2. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}^k$ son funciones continuas y $\alpha : X \to \mathbb{R}$ es continua entonces*

$$f + g : X \to \mathbb{R}^k \quad , \quad \langle f\,,\, g\rangle : X \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha\, f : X \to \mathbb{R}^k$$

son funciones continuas.

Demostración. Veamos 1: por un lado, si f es continua entonces $f_i = \pi_i \circ f$ es continua por el Teorema 5.17. Recíprocamente, supongamos $f_i = \pi_i \circ f$ es continua para todo $1 \leq i \leq k$. Sea $p \in X$ y $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Entonces, por hipótesis y el Teorema 5.13 vemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(p) \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq k\,.$$

Por resultados del Cap 4. vemos que (como hay convergencia coordenada a coordenada) entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f_1(x_n), \ldots, f_k(x_n)) = (f_1(p), \ldots, f_k(p)) = f(p) \in \mathbb{R}^k$$

con respecto a la métrica usual de $\mathbb{R}^k$. El Teorema 5.13 muestra ahora que $f(x)$ es continua en $p \in X$; como p era arbitrario vemos que f es continua.

Antes de probar el ítem 2, aclaremos la notación: en este caso $f + g : X \to \mathbb{R}^k$ es la función dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^k$, $x \in X$. De forma similar, $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle \in \mathbb{R}$ y $(\alpha\, f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x) \in \mathbb{R}^k$ determinan los valores de las demás funciones.

Notemos que si denotamos $f_i = \pi_i \circ f$ y $g_i = \pi_i \circ g$ a las funciones coordenadas de f y g, $1 \leq i \leq k$ entonces las funciones coordenadas $(f + g)_i = f_i + g_i$, $1 \leq i \leq k$. Por el Corolario 5.12 vemos que estas funciones coordenadas son continuas. Por la primera parte de la prueba concluimos que $f + g : X \to \mathbb{R}^k$ es continua. Los demás casos se prueban de forma similar ($\square$). ■

Ejemplos 5.22. Consideramos los siguientes ejemplos:

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces se verifica $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$. Así, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = |x|$ y $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ denota la métrica usual en $\mathbb{R}$, tenemos que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. Esto último implica que f es una función continua (de hecho, podemos tomar $\delta = \varepsilon > 0$ en la Definición 5.9).

2. Recordemos que las funciones coordenadas $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ son continuas, $1 \leq i \leq k$. Usando los resultados anteriores sobre funciones continuas podemos concluir que todo polinomio en las variables $(x_1, \ldots, x_k)$ es una función continua en $\mathbb{R}^k$.

3. Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Consideramos la función *distancia al conjunto* E, notada

$$d^E : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad d^E(x) = \inf\{d(e, x) :\ e \in E\}\ ,\ x \in X\,.$$

Notemos que d^E está bien definida en X y toma valores no negativos. Veamos que d^E es una función continua: en efecto, si $x, y \in X$ y $e \in E$ entonces

$$d^E(x) \leq d(x, e) \leq d(x, y) + d(y, e) \implies d^E(x) - d(x, y) \leq d(y, e)\,.$$

Como $e \in E$ es arbitrario, tomando ínfimo sobre $e \in E$ vemos que $d^E(x) - d(x,y) \leq d^E(y)$ y luego que $d^E(x) - d^E(y) \leq d(x,y)$. Cambiando los roles de x e y, (y repitiendo el argumento anterior) vemos que $-(d^E(x) - d^E(y)) = d^E(y) - d^E(x) \leq d(y,x) = d(x,y)$; las desigualdades anteriores muestran que

$$|d^E(x) - d^E(y)| \leq d(x,y) \quad \text{para} \quad x, y \in X\,.$$

Esto último implica que d^E es una función continua (de hecho, podemos tomar $\delta = \varepsilon > 0$ en la Definición 5.9). △

5.3 Continuidad, compacidad y conexión

En lo que sigue vamos a usar algunas de las nociones topológicas consideradas previamente (conjuntos compactos, conexos) en espacios métricos en conjunto con la noción de continuidad. De esta forma, obtenemos una serie de resultados centrales del análisis.

Teorema 5.23. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's, y supongamos que (X, d_X) es compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua entonces $f(X) \subseteq Y$ es compacto en (Y, d_Y).*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento por abiertos de $f(X) \subseteq Y$: queremos mostrar que este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito de $f(X)$. Para mostrar esto, para $\alpha \in A$ consideramos $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$: entonces $U_\alpha \subseteq X$ es un abierto, por el Teorema 5.15. En este caso $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento (por abiertos) de X. En efecto, si $x \in X$ entonces $f(x) \in f(X)$ y existe $\alpha \in A$ tal que $f(x) \in V_\alpha$: entonces $x \in f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha$. Como X es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq A$ tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in F}$ cubre a X. En este caso, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ es un subcubrimiento de $f(X)$: como antes, si $y \in f(X)$ entonces $y = f(x)$ para algún $x \in X$; en este caso existe $\alpha \in F$ tal que $x \in U_\alpha$ y luego $f(x) \in f(U_\alpha) = f(f^{-1}(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$ (□). Lo anterior muestra que $f(X) \subseteq Y$ es compacto. ■

Teorema 5.24. *Sea (X, d) un EM compacto y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ una función continua. Entonces $f(X) \subseteq \mathbb{R}^k$ es cerrado y acotado.*

Demostración. Por el teorema anterior $f(X) \subseteq \mathbb{R}^k$ es subconjunto compacto y ya hemos verificado que en este caso $f(X)$ resulta cerrado y acotado. ■

Teorema 5.25. *Sea (X, d) un EM compacto (y no vacío) y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen $x_0, x_1 \in X$ tales que*

$$f(x_0) = \max\{f(x) :\ x \in X\} \quad y \quad f(x_1) = \min\{f(x) :\ x \in X\}\,.$$

Demostración. Hemos mencionado que $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y acotado (y no vacío). Por la observación anterior, $\sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$ (porque $f(X)$ es cerrado - Ver Teoremas 3.30 y 3.32). De forma similar, $\inf f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$. Lo anterior muestra que existen $x_0, x_1 \in X$ tales que

$$f(x_0) = \sup\{f(x) :\ x \in X\} \quad \text{y} \quad f(x_1) = \inf\{f(x) :\ x \in X\}\,.$$

Así, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in X$. En particular, valen las identidades propuestas en el enunciado del teorema. ■

Lema 5.26. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's tal que (X, d_X) es compacto. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Si $F \subseteq X$ es cerrado entonces la imagen directa $f(F) \subseteq Y$ es cerrada.*

Demostración. Si $F \subseteq X$ es cerrado entonces (F, d_F) es compacto. Por otro lado, la restricción $f|_F : F \to Y$ es una función continua de (F, d_F) en (Y, d_Y) (□: como sugerencia, notar que $(f|_F)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap F$ para todo $V \subseteq Y$, y recordar la descripción de los abiertos (relativos) en el espacio métrico (F, d_F)). Por el teorema anterior, $f|_F(F) = f(F) \subseteq Y$ es compacta y en particular, cerrada. ■

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es *cerrada* (respectivamente f es *abierta*) si f manda cerrados en X en cerrados en Y (respectivamente, abiertos de X en abiertos de Y): formalmente, f es cerrada si $f(F) \subseteq Y$ es subconjunto cerrado siempre que $F \subseteq X$ sea subconjunto cerrado. Notemos que el resultado anterior muestra que si (X, d_X) es compacto y f es continua, entonces f es cerrada.

Definición 5.27. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es un homeomorfismo entre X e Y si f es continua, biyectiva y la función inversa (que está bien definida) $f^{-1} : Y \to X$ es continua. △

Teorema 5.28. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's tal que (X, d_X) es compacto. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua y biyectiva. Entonces $f^{-1} : Y \to X$ es continua, es decir, f es un homeomorfismo.*

Demostración. Por hipótesis, la función inversa $g = f^{-1} : Y \to X$ está bien definida. Para probar su continuidad, basta verificar si $F \subseteq X$ es cerrado en X, entonces la preimagen $g^{-1}(F) \subseteq Y$ es cerrada en Y. Pero

$$g^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$$

coincide con la imagen directa $f(F) \subseteq Y$. Por el lema anterior, $f(F) \subseteq Y$ es cerrada y $g = f^{-1}$ resulta continua. ■

Ejemplo 5.29. La hipótesis de compacidad de X no puede ser omitida en el enunciado anterior. Por ejemplo, la función $h(x) : [0, 2\pi) \to S^1 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : \ z^2 + w^2 = 1\}$ dada por $h(x) = (\sin(x), \cos(x))$, $x \in [0, 2\pi)$ es continua y biyectiva; pero $h^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ no es continua en $p = (0, 1) \in S^1$ (□). En este caso, $h(x)$ no es homeomorfismo. △

Definición 5.30. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \, .$$

Notemos que el δ anterior solo depende de $\varepsilon > 0$: así siempre que dos puntos cualesquiera x, $y \in X$ estén a distancia menor que δ, los valores $f(x)$ y $f(y)$ estarán a distancia menor que $\varepsilon > 0$. △

Con las notaciones de la definición anterior, notemos que si f es uniformemente continua, entonces resulta continua en el sentido de la Definición 5.9 (con la condición adicional que el δ ¡no depende de p!).

Ejemplo 5.31. En general, se pueden construir funciones continuas que no son uniformemente continuas (es decir, la condición de ser uniformemente continua es más fuerte que ser solo continua). En efecto, consideremos $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1)$. Entonces f es continua pero no uniformemente continua (□). △

Teorema 5.32. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y supongamos que (X, d_X) es compacto. Si $f : X \to Y$ es función continua entonces resulta uniformemente continua*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; como f es continua, para cada $p \in X$ existe $\delta_p > 0$ tal que si $d_X(p,x) < \delta_p$ entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon/2$. Entonces $\{B_{\delta_p/2}(p)\}_{p\in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X; como X es compacto, existe $F \subseteq X$ tal que $\{B_{\delta_p/2}(p)\}_{p\in F}$ es un subcubrimiento finito. Sea $\delta = \min\{\delta_q/2 : \ q \in F\}$; como se trata de un mínimo de una cantidad finita de números positivos, se tiene $\delta > 0$.

Sean $x, y \in X$ son tales que $d_X(x,y) < \delta$: notemos que debe existir $p \in F$ tal que $x \in B_{\delta_p/2}(p)$. En este caso, $d_X(p,x) < \delta_p/2 < \delta_p$. Pero entonces

$$d_X(p,y) \leq d_X(p,x) + d(x,y) < \delta_p/2 + \delta \leq \delta_p/2 + \delta_p/2 = \delta_p\,.$$

Así, $d_X(p,y) < \delta_p$. Por definición de δ_p tenemos que $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon/2$ y $d_Y(f(p), f(y)) < \varepsilon/2$: entonces, por desigualdad triangular

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(p), f(x)) + d_Y(f(p), f(y)) < \varepsilon\,.$$

■

Teorema 5.33. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y supongamos que (X, d_X) es conexo. Si $f : X \to Y$ es función continua entonces $f(X) \subseteq Y$ es subconjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(X) \subseteq Y$ no es conexo. En este caso existen abiertos V_1, $V_2 \subseteq Y$, no vacíos, tales que

$$V_1 \cap f(X) \neq \emptyset \neq V_2 \cap f(X) \ , \ V_1 \cap f(X) \cap V_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad f(X) \subseteq V_1 \cup V_2\,.$$

Consideremos $U_1 = f^{-1}(V_1)$ y $U_2 = f^{-1}(V_2)$. Entonces ($\square$) U_1, $U_2 \subseteq X$ son abiertos

$$U_1 \neq \emptyset \neq U_2 \ , \ U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad X \subseteq U_1 \cup U_2\,.$$

Los hechos anteriores contradicen la hipótesis de que X es conexo. Esta contradicción muestra que $f(X)$ es conexo. ■

Teorema 5.34. *[de los valores intermedios] Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(a) < f(b)$ (respectivamente $f(a) > f(b)$). Si $f(a) \leq c \leq f(b)$ (respectivamente $f(a) \geq c \geq f(b)$) entonces existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. Como $[a,b]$ es conexo (probado antes) entonces, por el teorema anterior, $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ es conexo. Por la caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (Teorema 3.63), si $f(a) \leq c \leq f(b)$ entonces (como $f(a)$, $f(b) \in f([a,b])$) vemos que $c \in f([a,b])$. Lo anterior muestra que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$. El segundo caso se obtiene aplicando el mismo argumento a la función $-f$ ($\square$). ■

Ejemplo 5.35. Consideremos $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Entonces $f(x)$ resulta continua (restricción de una función polinomial). Como $f(0) = 0 \leq 2 \leq f(2) = 4$ concluimos que debe existir $x \in [0,2]$ tal que $f(x) = 2$: en este caso, $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. △

5.4 Límites laterales en $\mathbb{R}$

Definición 5.36. Sea (X,d) un EM, $q \in X$, a, $b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a,b) \to X$ una función.

1. Sea $a \leq c < b$: decimos que el límite, cuando x tiende a c por la derecha, de $f(x)$ es $q \in X$, notado $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = q$ si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en (c,b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ en $\mathbb{R}$, se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = q$ en (X,d).

2. Sea $a < c \leq b$: decimos que el límite, cuando x tiende a c por la izquierda, de $f(x)$ es $p \in X$, notado $\lim_{x \to c^-} f(x) = p$ si para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en (a, c) tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ en $\mathbb{R}$, se verifica que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = p$ en (X, d). △

Obs 5.37. Sea (X, d) un EM, $q \in X$, $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to X$ una función. Si $c \in (a, b)$ entonces $\lim_{x \to c} f(x) = q$ si y solo si $\lim_{x \to c^-} f(x) = q = \lim_{x \to c^+} f(x)$ (□).

△

Definición 5.38. Sea (X, d) un EM, $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to X$ una función tal que f no es continua en $c \in (a, b)$. Decimos que f tiene una discontinuidad de primer clase (o simple) en c si existen los límite laterales $\lim_{x \to c^-} f(x) = q$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = q'$ en X. En otro caso, decimos que f tiene una discontinuidad de segunda clase en c. △

Definición 5.39. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es:

1. monótona creciente si $a < x \leq y < b$ entonces $f(x) \leq f(y)$.
2. monótona decreciente si $a < x \leq y < b$ entonces $f(x) \geq f(y)$.
3. monótona si es monótona creciente o monótona decreciente.

△

Teorema 5.40. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente en (a, b). Si $c \in (a, b)$ entonces*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : \ a < x < c\} \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : \ c < x < b\}\,.$$

Demostración. Sea $c \in (a, b)$: entonces $A = \{f(x) : \ x \in (a, c)\}$ está acotado superiormente por $f(c)$, porque f es monótona creciente. En particular, existe $\sup A = \alpha \leq f(c)$. Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ sucesión en (a, c) tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\alpha - \varepsilon < \alpha$ no es cota superior de A: en este caso, existe $d \in (a, c)$ tal que $f(d) > \alpha - \varepsilon$. Como $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ y $c - d > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - c| < (c - d)$. En este caso, $d < x_n < c$, $n \geq n_0$; entonces

$$\alpha - \varepsilon < f(d) \leq f(x_n) \leq \alpha \implies |f(x_n) - \alpha| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_0\,.$$

Lo anterior muestra que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$; a su vez, esto muestra que existe

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \alpha = \sup\{f(x) : \ x \in (a, c)\} \leq f(c)\,.$$

La existencia del límite por derecha y el hecho de que coincida con el ínfimo indicado se deducen con argumentos similares (□). ■

Corolario 5.41. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente.*

1. *f no tiene discontinuidades de segunda clase.*
2. *El conjunto de puntos en donde f es discontinua es a lo sumo numerable.*

Demostración. El primer ítem es consecuencia de la definición de discontinuidad de segunda clase y el resultado anterior.

Para probar el segundo ítem, sea $E \subseteq (a,b)$ el conjunto formado por los puntos en donde f es discontinua. Si $p \in E$ entonces necesariamente tenemos que

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \ell_p < \lim_{x \to p^+} f(x) = r_p \,.$$

En este caso podemos elegir $q(p) \in \mathbb{Q} \cap (\ell_p, r_p)$. De esta forma, queda definida una función $q : E \to \mathbb{Q}$. Notemos que esta función es inyectiva: en efecto, si p, $p' \in E$, $p < p'$ entonces

$$r_p = \lim_{x \to p^+} f(x) \leq \lim_{x \to (p')^-} f(x) = \ell_{p'}$$

($\square$: usar el resultado anterior). Entonces $q(p) < r_p \leq \ell_{p'} < q(p')$ y en particular, $q(p) \neq q(p')$. Notemos que de esta forma hemos construido una biyección $q : E \to q(E)$; como $q(E) \subseteq \mathbb{Q}$ entonces $q(E)$ es un conjunto a lo sumo numerable (por ser subconjunto de un conjunto numerable). Como E y $q(E)$ tienen el mismo cardinal, vemos que E es a lo sumo numerable.

■

Para finalizar este capítulo incluimos la noción de límite hacia los infinitos.

Definición 5.42. *Sea (X,d) un EM, $E \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : E \to X$.*

1. *Supongamos que E no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Decimos que $f(x)$ tiende a $q \in X$ cuando x tiende a $+\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in E$ tal que $x \geq M$ se tiene que $d(f(x), q) < \varepsilon$.*

2. *Supongamos que E no está acotado inferiormente en $\mathbb{R}$. Decimos que $f(x)$ tiende a $r \in X$ cuando x tiende a $-\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in E$ tal que $x \leq M$ se tiene que $d(f(x), r) < \varepsilon$.*

△

5.5 Ejercicios del texto

5.1. Demostrar el Corolario 5.5 (Unicidad de límites): Probar que si $\lim_{x \to p} f(x) = q$ y $\lim_{x \to p} f(x) = q'$ entonces $q = q'$.

5.2. Completar la demostración del Teorema 5.7: Sea (X,d) un EM, $E \subseteq X$ y consideramos $\mathbb{C}$ con la métrica usual. Sean f, $g : E \to \mathbb{C}$ y $p \in E'$ tales que

$$\lim_{x \to p} f(x) = z \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to p} g(x) = w \in \mathbb{C} \,.$$

Probar que

1. $\lim_{x \to p} (f+g)(x) = z + w$.
2. $\lim_{x \to p} (f \cdot g)(x) = z \cdot w$.
3. Si $w \neq 0$, sea $F = \{x \in E : \ g(x) \neq 0\} \subseteq E$; entonces $p \in F'$ y vale que

$$\lim_{x \in F,\ x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{z}{w} \,.$$

5.3. Demostrar el Corolario 5.12: Sea (X,d) un EM y consideramos $\mathbb{C}$ con la métrica usual. Sean f, $g : X \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $p \in X$. Probar que $(f+g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$ son continuas en $p \in X$ y que si $p \in F = \{x \in X : \ g(x) \neq 0\}$ entonces $f/g : F \to \mathbb{C}$ es continua en p.

5.4. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Probar que si $H \subseteq Y$ entonces $f^{-1}(Y \setminus H) = X \setminus f^{-1}(H)$.

5.5. Demostrar la observación 5.18: Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) EM's y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones tales que f es continua en $p \in X$ y g es continua en $f(p) \in Y$. Demostrar que $g \circ f : X \to Z$ es función continua en $p \in X$.

5.6. Completar la demostración del Teorema 5.21: Sea (X, d) un EM, sea $\mathbb{R}^k$ con la métrica (euclídea) usual y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ función. Para cada $1 \leq i \leq k$, sea $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, la i-ésima función coordenada. Probar:

1. f es continua si y solo si f_i es continua, $1 \leq i \leq k$.
2. Si $f, g : X \to \mathbb{R}^k$ son funciones continuas y $\alpha : X \to \mathbb{R}$ es continua entonces

$$f + g : X \to \mathbb{R}^k \quad , \quad \langle f \, , \, g \rangle : X \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha \, f : X \to \mathbb{R}^k$$

son funciones continuas.

5.7. Completar la demostración del Teorema 5.23: Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's, y supongamos que (X, d_X) es compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua demostrar que $f(X) \subseteq Y$ es compacto en (Y, d_Y).

5.8. Demostrar el Lema 5.26: Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's tal que (X, d_X) es compacto. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua y $F \subseteq X$ es cerrado. Probar que la restricción $f|_F : F \to Y$ es una función continua de (F, d_F) en (Y, d_Y).

5.9. Demostrar el ejemplo 5.29: Sea $f : X \to Y$ dada por

$$f(t) = (cos(t), sen(t)),$$

donde $X = [0, 2\pi), Y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Demostrar que f es continua y biyectiva, pero que f^{-1} no es continua. En este caso, $f(x)$ no es homeomorfismo.

5.10. Demostrar el ejemplo 5.31: Consideremos $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1)$. Demostrar que f es continua pero no uniformemente continua.

5.11. Completar la demostración del Teorema 5.33: Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y supongamos que (X, d_X) es conexo. Si $f : X \to Y$ es función continua entonces $f(X) \subseteq Y$ es subconjunto conexo.

5.12. Completar la demostración del Teorema 5.34: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(a) > f(b)$. Si $f(a) \geq c \geq f(b)$ probar que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

5.13. Demostrar la observación 5.37: Sea (X, d) espacio métrico, $q \in X$, $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to X$ una función. Probar que si $c \in (a, b)$ entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x) = q$ si y solo si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = q = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

5.14. Completar la demostración del Teorema 5.40: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente en (a, b). Si $c \in (a, b)$ probar que

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : \ a < x < c\} \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : \ c < x < b\} .$$

5.15. Completar la demostración del Corolario 5.41: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ función monótona creciente. Demostrar:

1. f no tiene discontinuidades de segunda clase.
2. El conjunto de puntos en donde f es discontinua es a lo sumo numerable.

5.6 Ejercicios nuevos

5.16. Considerar $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar, usando la definición, que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$$

5.17. Considerar a y b positivos. Mostrar, por definición, que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

5.18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que $|f|$ es una función continua. Dar un ejemplo donde no vale la recíproca.

5.19. Sea $f : X \to Y$ una función continua donde X e Y son EM's. Probar que para todo $E \subseteq X$ se cumple

$$f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}.$$

Por medio de un ejemplo, mostrar que $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

5.20. (*) Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{Si } x = \dfrac{m}{n}, (m,n) = 1 \text{ y } n > 0 \\ 1, & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.

Sugerencia: Sea $[a, b]$ un intervalo acotado y sea $N \in \mathbb{N}^*$. Probar que el conjunto

$$A_N = \left\{ \frac{m}{n} \in [a,b] : (m,n) = 1,\ 1 \le n \le N \right\}$$

es finito. Esto nos ayuda a probar que la función es continua en los irracionales.

5.21. Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas donde X, Y son EM's.

a) Probar que el conjunto $\{x :\ f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

b) Probar que si existe E denso en X tal que $g(p) = f(p)$ para todo $p \in E$ entonces $g = f$.

5.22. Considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > x$. Demostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) > y$ (donde n puede depender de x e y).

Observación: En este ejercicio entendemos por f^n a componer n veces a la función f consigo misma. Es decir, no es una potencia.

5.23. Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Se define el gráfico de f como el conjunto

$$gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\}.$$

Supongamos que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto. Demostrar que f es continua si y solo si $gr(f)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

5.24. Utilizar la función continua $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, para probar que existen conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ abiertos tales que $f(U)$ no es un conjunto abierto.

5.25. Probar que toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abierta y continua es monótona.

5.26. Sea (X, d) un EM y sea $E \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Demostrar que

$$E \text{ es cerrado} \iff E = (d^E)^{-1}(0).$$

5.27. Sean A y B dos conjuntos disjuntos, cerrados y no vacíos de un espacio métrico X. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{d^A(x)}{d^A(x) + d^B(x)}.$$

Demostrar que f es continua, $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$. Si además, X es conexo entonces $f(X) = [0, 1]$.

5.28. Sea (X, d) un EM.

a) Supongamos que existen U, V dos conjuntos abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$. Probar que la siguiente función es continua

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in V \end{cases}.$$

b) Demostrar que (X, d) es conexo si y solo si, toda función continua $f : X \to \{0, 1\}$, donde $\{0, 1\}$ está equipado con la métrica usual, es constante.

5.29. Probar que $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

5.30. Probar que $f(x, y) = x^2 + 3y$ es uniformemente continua en $[0, 1] \times [0, 1]$ pero no en todo $\mathbb{R}^2$.

5.31. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no compacto. Dar ejemplos de $f : E \to \mathbb{R}$ tal que

a) f sea continua pero no acotada.

b) f sea continua y acotada y que no tenga máximo.

c) E acotado, f sea continua pero no uniformemente continua.

5.32.

a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y sea $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que f es acotada.

b) Ver que el resultado anterior es falso si E no es acotado.

c) Considerar a la función identidad de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, donde el dominio se considera con la métrica discreta y el codominio con la métrica usual. Probar que esta función es uniformemente continua pero que su dominio es acotado mientras que su rango no lo es.

5.33. Sean A y B dos conjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ y supongamos que $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ es continua. Supongamos que f es uniformemente continua en A y en B ¿Es f uniformemente continua en $A \cup B$?

5.34. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica continua, es decir, existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}$.

5.35. Sea $X \subseteq Y$ un conjunto acotado donde (Y, d) es un EM completo y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua.

a) Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, donde $a \in X'$, entonces $f(x_n)$ converge.

b) Demostrar que para todo $a \in X'$, existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

5.36. Probar el siguiente enunciado: Para que $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ sea uniformemente continua es necesario y suficiente, para todo par de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que

$$\lim_{n\to\infty} d_1(y_n, x_n) = 0,$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d_2(f(y_n), f(x_n)) = 0.$$

5.37. Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, supongamos que existe un $a > 0$ tal que f es uniformemente continua en $[0, a]$ y f es uniformemente continua en $[a, \infty)$. Probar que f es uniformemente continua.

5.38. Sea $D \subseteq X$ denso y sea $f : X \to Y$ una función continua tal que $f_{|D}$ es uniformemente continua. Probar que f es uniformemente continua.

5.39. Mostrar que las siguientes funciones no son uniformemente continuas en los conjuntos indicados:

a) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos(1/x)$ en $(0, 1)$.

c) $f(x) = 1/x$ en $(0, +\infty)$.

5.40. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $g_\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua tal que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$. Probar que f es uniformemente continua.