Complementos de Análisis - 2023

Práctica 1: Números Reales

---

1. (Propiedad arquimediana): Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$nx > y.$$

2. ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Mostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$ con $y < x$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que
$$x < p < y.$$

3. En cada caso, analizar si existe algún número que pertenezca a todos los intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$ siguientes (o sea, a la intersección)
   (a) $I_n = [0, \frac{1}{n})$
   (b) $I_n = (0, \frac{1}{n})$

4. (a) Sea $I = [a,\ b]$ un intervalo real cerrado. Probar que existe una familia $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos reales abiertos tales que $\forall\ n,\ J_{n+1} \subset J_n$ y tal que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$.
   (b) Sea $J = (a,\ b)$ un intervalo abierto de números reales. Probar que existe una familia $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos reales cerrados tales que $\forall\ n,\ I_n \subset I_{n+1}$ y tal que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = J$.

5. Hallar cotas superiores e inferiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos de números reales.
   (a) $A = (-1, +\infty)$
   (b) $B = [-1, 2)$
   (c) $C = [1, \sqrt{3}]$
   (d) $D = \{x : \ x(1-x) < 0\}$
   (e) $E = \left\{-1 + \dfrac{1}{n}\ ; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (f) $F = \left\{\dfrac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$
   (g) $G = \left\{1 + (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$
   (h) $H = \left\{\dfrac{x}{1+x^2}\ ;\ x \in \mathbb{R}\right\}$

6. Sea A un conjunto acotado de números reales que contiene al menos dos puntos. Probar que
   (a) $-\infty < \inf A < \sup A < \infty$
   (b) Si B es un conjunto no vacío de A, entonces $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$

7. Sea A un conjunto acotado de números reales, y sean

$$-A := \{-x \,:\, x \in A\}\,; \quad B := \left\{x^2 \,:\, x \in A\right\}; \quad |A| := \{|x| \,:\, x \in A\}$$

   Probar que

   (a) $\inf A = -\sup(-A)$
   (b) $\sup A = -\inf(-A)$
   (c) $\sup B = (\sup |A|)^2$

   Es cierto que $\sup B = (\sup A)^2$?

8. Para conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$, determinar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos. Demostrar los enunciados verdaderos y buscar contraejemplos para los falsos.

   (a) $\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$.
   (b) $\sup(A \cap B) = \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$.
   (c) $\sup(A \cup B) \geq \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.
   (d) $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$

9. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos acotados y sea $C = \{a + b \,:\, a \in A,\ b \in B\}$. Probar que $\inf C = \inf A + \inf B$.

10. Sean $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ y $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y sea $h : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) + g(x)$. Probar que $\sup\limits_{x \in [0,\,1]} h(x) \leq \sup\limits_{x \in [0,\,1]} f(x) + \sup\limits_{x \in [0,\,1]} g(x)$.

    Dar un ejemplo donde valga la igualdad y otro donde no valga.