Complementos de Análisis. Año 2023

Práctica 10. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

---

1 Modelando con ecuaciones diferenciales

Modelar con ecuaciones diferenciales las siguientes situaciones. Intentar resolver dichas ecuaciones.

1. La ley de enfriamento de Newton dice: La razón a la cual un objeto se enfría (o se calienta si el entorno es más caliente) es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del objeto y su entorno.(Temperatura del entorno: 10, constante de proporción: 2, temperatura inicial del objeto: 20.)

2. Una curva de ecuación $y = f(x)$ pasa por el origen. Dibujando lineas paralelas a los ejes coordenados desde cualquier punto de la curva se forma un rectángulo con dos lados sobre los ejes. La curva divide a cada uno de los rectángulos en dos regiones A yB, una de las cuales tiene área λ veces igual al área de la otra.

2 Resolviendo ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.1 Técnicas analíticas para ecuaciones diferenciales de primer orden

3. En los problemas siguientes, resolver las ecuaciones diferenciales sujetas a la condición inicial que se indica:

   (a) $(1-x)dy - y^2dx = 0, y(1/2) = 1,$

   (b) $x^3 \sin(y)y' = 2, y \to \dfrac{\pi}{2}, x \to +\infty.$

4. Las ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by + c)$, con a, by c constantes dadas, se reducen a ecuaciones de variables separables mediante el cambio de variables $z = ax + by + c$. Resolver:

   (a) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1,$

   (b) $y' = \dfrac{x + 2y - 8}{2x + 4y - 1}.$

5. Se dice que una función $f(x, y)$ es homogénea positiva de grado n si $f(\lambda x,\ \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Las ecuaciones de la forma $y' = f(x, y)$, con f una función homogónea de grado 0 o las ecuaciones de la forma $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$, con P y Q funciones homogéneas del mismo grado se denominan ecuaciones diferenciales homogéneas. Demostrar que estas ecuaciones se reducen a ecuaciones de variables separables mediante la sustitución $y(x) = xv(x)$ y resolver:

   (a) $-ydx + xdy = \sqrt{x^2 + y^2}dx,$

   (b) $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}.$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

   (a) $y' - 2\dfrac{y}{x+1} = e^x(1+x)^2$,

   (b) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, pasando por $(x_0,\ y_0) = (0,1)$.

7. Verificar que las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales exactas y resolver:

   (a) $(2x - y)dx + (3y^2 - x)dy = 0$,

   (b) $(e^y + 1)\cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$.

2.2 Método de aproximaciones sucesivas. Teorema de existencia y unicidad.

8. (a) Comprobar que la ecuación $xy' - y = 0$ con la condición $y(0) = 0$ tiene infinitas soluciones y con la condición $y(0) = y_0$, con $y_0 \neq 0$ no tiene solución. Trazar sus curvas integrales.

   (b) Dada la ecuación diferencial $4(y')^2 = 9x,\ x > 0$, verificar que $(y+c)^2 = x^2$ es solución y hallar dos curvas integrals que pasen por el punto $(3,1)$.

   (c) Demostrar que $y' = y^\alpha$ con $y(0) = 0$ tiene dos soluciones para $\alpha = 1/2$ y una sola solución para $\alpha = 1$.

   En todos los casos analizar la continuidad y/o la condición Lipschitz de $f(x,y)$ cuando se escribe la ecuación diferencial en la forma estándar $y' = f(x,y)$.

La sucesión de iteraciones que da el Teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial $y' = F(x,y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ (a través del Teorema de punto fijo) es

$$f_0(x) = y_0$$
$$f_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, f_{n-1}(s))\, ds$$

El teorema garantiza la convergencia a la solución en $|x - x_0| < r$, donde $r = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$, la función $F(x,y)$ es continua en $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ y es Lipchitz continua respecto de la variable y. Aquí $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |F(x,y)|$.
Este método se cooce como de aproximaciones sucesivas.

9. Dada la ecuación diferencial
$$y' = 1 + y^2;\ y(0) = 0$$
   hallar el intervalo teórico donde se asegura existencia y unicidad de la solución. Luego resolver y comparar el intervalo hallado con el dominio de la solución obtenida.

10. Resolver $y' = 3xy;\ y(0) = 1$ de las siguientes maneras:

    (a) por el método de aproximaciones sucesivas

    (b) por algún método adecuado

    (c) planteando la solución en forma de serie $\left(y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ y hallando el valor de los coeficientes

11. Encontrar una función $f(x)$ que satisfaga la siguiente ecuación integral:
$$f(x) = -1 + \int_2^x \left(t^2 - f(t)\right) dt.$$

12. Hallar la familia de funciones $y = y(x)$ solución de $y' = f(x,\ y)$:

    $(a)\ f(x,\ y) = 2, \qquad (b)\ f(x,\ y) = y(1-y).$

    En cada caso graficar el campo de pendientes (sobre el plano se dibujan algunos segmentos pequeños centrados en (x,y) con pendiente $f(x,\ y)$) y algunas de las soluciones encontradas. Qué se observa?

2.3 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

13. (a) Sea $\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ una matriz de coeficientes derivables y sea $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$ una función vectorial. Probar que

$$(\Psi\mathrm{P})'(t) = \Psi'(t)\mathrm{P}(t) + \Psi(t)\mathrm{P}'(t)\ .$$

    (b) Consideremos el sistema de EDOs lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\mathrm{Y}'(t) = \Psi(t)\mathrm{Y}(t)\ .\ (1)$$

    Supongamos que la función matricial M satisface la ecuación

$$\mathrm{M}'(t) = \Psi(t)\mathrm{M}(t)\ .$$

    Probar que $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{M}(t)\mathrm{C}$, donde C es un vector arbitrario, es solución del sistema (1). Qué otra propiedad se le debe pedir a la matriz M para asegurar que todas las soluciones de (1) han sido halladas?

    (c) Consideremos ahora el sistema de EDOs lineal no homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\mathrm{Y}'(t) = \Psi(t)\mathrm{Y}(t) + \mathrm{F}(t)\ .$$

    Supongamos que la función matricial M satisface

$$\mathrm{M}'(t) = \Psi(t)\mathrm{M}(t)\ ,\ \text{y}\ \det \mathrm{M}(t) \neq 0.$$

    Probar que $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{M}(t)\mathrm{C}(t)$, donde $\mathrm{C}(t)$ es una función vectorial apropiada, es solución del sistema. Encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales que cumpla $\mathrm{C}(t)$.

14. Verificar que

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

    Usar lo anterior para encontrar soluciones de

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 + y_3 \\ y_3' = y_3 \end{cases}$$

15. Encontrar la solución general para los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = & x - 5y \\ y' = & 2x - y \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x' = & 2x + y \\ y' = & 4y - x \end{cases}$$

16. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$, mostrar que el problema de valores iniciales

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}, \ \mathrm{Y}(t_0) = \mathrm{Y}_0$$

tiene como solución a $\mathrm{Y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathrm{Y}_0$. Usar este resultado para resolver

$$\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathrm{Y}, \ \mathrm{Y}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Cuando se conoce una solución y_1 de una ecuación diferencial lineal de orden 2

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = 0$$

en cierto intevalo I, es posible encontrar otra solución y_2 de la forma $y_2(x) = \Phi(x)y_1(x)$, encontrando y resolviendo la ecuación diferencial (de orden 1) que verifica la función desconocida Φ. Este método se conoce como de "reducción del orden de la ecuación".

(a) Resolver la ecuación diferencial $x^3y'' - xy' + y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución.

(b) Hallar una solución general de $xy'' + 2y' + xy = 0$

i. haciendo el cambio de variables $u = xy$ y llevando la ecuación resultante a un sistema lineal.

ii. usando que $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$ es una solución en $x > 0$.