Complementos de Análisis. Año 2023

Práctica 9: Diferenciabilidad (Ejercicios complementarios)

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n$ la función dada por $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con su estructura euclídea usual. Mostrar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y que para todo $h \in \mathbb{R}^n$,
$$[Df(x)]\,(h) = -\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^3}\, x + \frac{h}{\|x\|}$$

2. Sean X e Y espacios de Banach, $U \subseteq X$ y $f : U \to Y$ una función diferenciable. Mostrar que f es Lipschitz si y sólo si existe $M > 0$ tal que para todo $x \in U$, $\|Df(x)\| \leq M$.

3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que no es diferenciable en ningún punto de su dominio. Sea $h(x) := \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t$. Utilizando la función real h antes definida, construir una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tenga todas las siguientes características:
   a. sea diferenciable con continuidad en todo su dominio,
   b. $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sea diferenciable con continuidad en todo $\mathbb{R}^2$,
   c. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ sea continua en todo $\mathbb{R}^2$, y
   d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ no exista en ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

4. Sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$, $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Mostrar que f es diferenciable en 0.

5. Sea $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = A^t A$. Mostrar que f es diferenciable y calcular su derivada.

6. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $f(x, y) = (xy, x - y, x^2 + y^2)$ y $g(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.
   (a) Calcular $Df(u)$ para $u \in \mathbb{R}^2$ y expresarlo matricialmente en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calcular $Dg(v)$ para $v \in \mathbb{R}^3$ y expresarlo matricialmente en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
   (c) Calcular $D(g \circ f)(u)$ para $u \in \mathbb{R}^2$ y expresarlo matricialmente en términos de Df y Dg.
   (d) ¿Admite $g \circ f$ una inversa local alrededor del origen? Justifique.
   (e) ¿Define implícitamente g a z en función de x e y en un entorno del origen? Justifique.