Estructuras Algebraicas

Módulos noetherianos y Artinianos

Zarate Sebastian

8 de julio de 2015

Índice

1. Preliminares

En este trabajo abordaremos algunos resultados sobre Módulos Noetherianos y Artinianos, sus definiciones y ciertas equivalencias que permitirán trabajar mas facilmente con dichos módulos.

Recordaremos algunas definiciones que nos serán útiles en el desarrollo del trabajo.

1.1. Grupos

Definición. Diremos que $(G,+)$ es un Grupo Abeliano con la operación $+ : G \times G \to G$ si cumple $\forall$ x,y,z $\in$ G :

- $(x+y)+z = x+(y+z)$
- Existe $e \in G$ tal que $e+x = x+e$ para todo $x \in G$
- Para todo $x \in G$ existe $x' \in G$ tal que $x+x' = x'+x = e$.
- para todo par x,y $\in G$ vale que $x+y = y+x$.

De la definición anterior se obtiene que el neutro y los inversos son únicos.

Definición. Dado $(G,+)$ un grupo y N $\subset$ G tal que:

- $+$ es cerrado en N.
- e $\in$ N
- $\forall h \in$ N, $-h \in N$ (el inverso también está).

Definición. Sea $(G,+)$ un grupo y N $\subset$ G , se llama generado por N a la intersección de todos los subgrupos de G que contienen a N. Notación $\langle N \rangle$.

Definición. Sean (G,+) y (G',*) dos grupos, una función $f : G \to G'$ se llama morfismo de grupos si y solo si para todo $g_1, g_2 \in G$ vale la igualdad:

- $f(g_1+g_2) = f(g_1) * f(g_2)$

Observación. Sean G,G' dos grupos, $f : G \to G'$ un morfismo, diremos que es :

- Un monomorfismo si es un morfismo inyectivo.
- Un epimorfismo si es un morfismo suryectivo.
- Un isomorfismo si es un morfismo biyectivo.

Proposición. Sean G,G' dos grupos, $f : G \to G'$ un morfismo, entonces:

- $f(e_G) = e_{G'}$
- $\forall g \in G$, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
- f es monomorfismo $\Leftrightarrow f(g) = e_{G'} \Rightarrow g = e_G$.

Definición. Si $f : G \to G'$ es un morfismo de grupos, tenemos asociados a dicho morfismo los siguientes subgrupos:

- $Ker(f) = \{g \in G / f(g) = e_{G'}\}$
- $Im(f) = \{g' \in G' / \exists g \in G$ tal que $f(g) = g'\}$

1.2. Anillos

Definición. Una terna (A,+,.) con (A,+) un grupo abeliano y $. : A \times A \to A$ se dirá un anillo con unidad si:

- $\forall$ a,b,c $\in$ A, $(a.b).c = a.(b.c)$
- Existe un elemento distinto del cero en A con respecto a + que llamaremos 1 tal que $1.a = a.1 = a$, $\forall a \in$ A.
- $\forall a, b, c \in A \quad a.(b + c) = a.b + a.c$ y $(a + b).c = a.c + b.c$

Si además se satisface $a.b = b.a$ para todo $a, b \in$ A, diremos que es un Anillo conmutativo con unidad.

Definición. Dado (A,+,.) un anillo y B un subconjunto de A, diremos que B es un subanillo de A si y solo si:

- (B,+) es un subgrupo de (A,+).
- $1_A \in$ B
- B es cerrado para el producto, es decir, dados $x, y \in$ B, entonces $x.y \in$ B

Definición. Dados dos anillos con unidad $(A, +_A, *_A)$ y $(B, +_B, *_B)$, un morfismo de anillos con unidad entre A y B, es una función $f : A \to B$ que verifica:

- $f : (A, +_A) \to (B, +_B)$ es un morfismo de grupos.
- $f(a._A a') = f(a)._B f(a')$. $\forall a, a' \in A$.
- $f(1_A) = 1_B$.

Definición. Sea (G,+) un grupo abeliano, definimos
$End(G) = \{f : G \to G / f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in G\}$. Además End(G) es un Anillo con la suma usual y el producto dado por la composición de funciones.

1.3. Módulos

Definición. Un A-Módulo a izquierda, es un grupo abeliano (G,+), provisto de un morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \rho : A &\longrightarrow End(G) \\ a &\longmapsto \rho_a \end{aligned}$$

Es decir, una estructura de A-Módulo sobre un Grupo abeliano G, es asignar a cada elemento a de A una transformación del grupo G. Esta asignación nos dice que:

- $\rho_1 = Id_G$.
- $\rho_{a.b} = \rho_a \circ \rho_b$.

- $\rho_{a+b} = \rho_a + \rho_b$

Una definición equivalente de A-Módulo a Izquierda, es pensar que se tiene una función $A \times G \to G$ que asigna un par (a,g) a un elemento "a.g", donde a.g es una notación para designar a $\rho_a(g)$. El hecho de que ρ sea un morfismo de anillos entre A y End(G) nos dice que :
Si a,b $\in$ A, x,y $\in$ G

- $1.x = x$
- $(ab).x = a.(b.x)$.
- $(a+b).x = a.x + b.x$.
- como $\rho \in End(G),\ a.(x+y) = a.x + a.y$.

Definición. Dado un anillo A, un subconjunto N de un A-Módulo G se dirá un submódulo si

- N es subgrupo de (G,+).
- $a.n \in N\ \forall a \in A, n \in N$.

Notar que todo submodulo es en sí mismo un A-Módulo.

Observación. Dado un A-Módulo G, si existen $x_1, ..., x_n \in G$ tales que $\langle x_1, ..., x_n \rangle = G$, diremos que G es finitamente generado o de tipo finito sobre A.

Definición. Sea A un anillo, G, G' dos A-Módulos y $f : G \to G'$ una función. Diremos que f es un morfismo de A-Módulos si es morfismo de grupos abelianos y A lineal, es decir:

- $f(x+y) = f(x) +_G' f(y)\ \forall x, y \in G$
- $f(a.x) = a.f(x)\ \forall a \in A,\ x \in G$.

Definición. Sean $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de A-Módulos junto con morfismos $f_n : G_n \to g_{n-1}$. Diremos que la sucesión

$$\ldots \xrightarrow{f_{n+2}} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$$

es exacta en el lugar n si $Ker(f_n) = Im(f_{n+1})$. Si la sucesión es exacta para todo n diremos que la sucesión es exacta.

Observación 1.1.

1. La sucesión $0 \to M \xrightarrow{f} N$ es exacta en M si y solo si f es un monomorfismo (es un morfismo inyectivo).
2. La sucesión $M \xrightarrow{f} N \to 0$ es exacta en N si y solo si f es un epimorfismo (es un morfismo suryectivo).
3. Las sucesiones exactas cortas, son de la forma

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \to 0$$

Y cumplen que son exactas si y solo si f es un monomorfismo, g es un epimorfismo y $Im(f) = Ker(g)$.

Proposición 1.2. Sean M, N dos A-módulos y $f : M \to N$ un morfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es monomorfismo.

2. $Ker(f) = 0$.

3. Para todo A-módulo T y todo par de morfismos $g, h : T \to M$, la igualdad $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.

4. Para todo A-módulo T y para todo morfismo $g : T \to M$, la igualdad $f \circ g = 0$ implica $g = 0$.

2. Módulos noetherianos y artinianos

2.1. Módulos noetherianos

En esta sección veremos en que casos la propiedad de un Módulo de ser finitamente generado puede ser hereditaria, es decir, en que casos los submódulos de un módulo finitamente generado, también son finitamente generados. Para motivar, y ver que no es algo trivial, consideramos el siguiente ejemplo:
Sea $A = \mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$, con la estructura usual de anillos de funciones, esto es:
$\forall x \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

Sea $M = \mathbb{R}^{[0,1]}$ y $S = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]}/f(x) \neq 0 \text{ solo para finitos valores de } x\}$. El conjunto S es un ideal de M, en efecto si considero
$(f.g)(x) = f(x).g(x), f \in S, g \in M,\ (f.g)$ será distinta de cero a lo sumo en los finitos x_i donde lo era f. Luego S es un A-submódulo de M. M está generado por la función constante 1, pero S no es un A-módulo finitamente generado. Para ver esto, consideremos $f_1, ..., f_n \in S$ tales que $\langle f_1, ..., f_n \rangle = S$, y sea $\{x_1, ..., x_s\} \subset [0,1]$ la unión de todos los puntos x tales que existe alguna f_i con $f_i(x) \neq 0$ (el cual es finito). Sea $x_0 \in [0,1] - \{x_1, ..., x_s\}$.Si definimos $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x_0) = 1$ y $\phi(x) = 0$ si $x \neq x_0$ entonces $\phi \in S$ pero ϕ nunca puede pertenecer a $\langle f_1, ..., f_n \rangle$ pues $x_0 \in [0,1] - \{x_1, ..., x_s\}$. Veremos ahora que hay casos mas simples para resolver.

Proposición 2.1. Sea A un anillo y

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

una sucesión exacta corta de A-módulos. Entonces:

1. M_2 es de tipo finito, entonces M_3 es de tipo finito.
2. M_1 y M_3 de tipo finito, entonces M_2 es de tipo finito.

Demostración.

1. Sea $y_1, ..., y_n$ un conjunto de generadores de M_2 y $z \in M_3$. Como g es un epimorfismo por (2.1) ,existe $y \in M_2$ tal que $g(y) = z$. Ahora bien como M_2 es finitamente generado, $y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ con $a_i \in A$, entonces $z = \sum_{i=1}^{n} a_i g(y_i)$, por lo que $\{g(y_1), ..., g(y_n)\}$ genera M_3.

2. Sean $M_1 = \langle x_1, ..., x_r \rangle$, $M_3 = \langle z_1, ..., z_s \rangle$ y sean $y_1, ..., y_s$ elementos de M_2 tales que $g(y_i) = z_i \quad 1 \leq i \leq s$. Entonces $M_2 = \langle f(x_1), ..., f(x_r), y_1, ..., y_s \rangle$. En efecto, sea $y \in M_2$, $g(y) \in M_3$ por lo que existen $a_1, ..., a_s \in A$ con $g(y) = \sum_{i=1}^{s} a_i z_i$. Como $g(y) = g\left(\sum_{i=1}^{s} a_i y_i\right)$ entonces $g\left(y - \sum_{i=1}^{s} a_i y_i\right) = 0$.

Ahora bien $y' = y - \sum_{i=1}^{s} a_i y_i$ esta en la imagen de f, que es un módulo isomorfo a M_1 via f, ($f : M_1 \to Im(f)$ es un isomorfismo pues f ya era inyectiva, y restringida a su imagen queda biyectiva).En consecuencia $Im(f) = \langle f(x_1), ..., f(x_r) \rangle$ y existen $b_1, ..., b_r$ con $y' = \sum_{i=1}^{r} b_i f(x_i)$. Luego despejando y se obtiene $y = \sum_{i=1}^{r} b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{s} a_i y_i$. Por lo tanto M_2 es de tipo finito.

Corolario 1. Si $\phi : M \to N$ es un morfismo de A-módulos tal que $Ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ son de tipo finito, entonces M es de tipo finito.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \to Ker(\phi) \xrightarrow{Id} M \xrightarrow{\phi} Im(\phi) \to 0$$

Donde ϕ está restringida a su imagen (para que sea un epimorfismo) y Id actua como la inclusión de $Ker(\phi)$ en M. De esta forma, la sucesión es exacta y por el item 2 de la proposición M es de tipo finito.

Definición 2.2. Dado un anillo A, un A-módulo M se dirá noetheriano si y solo si todo submódulo de M es finitamente generado (en particular M será de tipo finito).

Proposición 2.3. Sea A un anillo y M un A-módulo, son equivalentes:

1. M es noetheriano
2. Todo conjunto no vacio de submódulos de M tiene un elemento Maximal.
3. Toda sucesión (no vacía) creciente de submodulos se estaciona.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Consideramos como conjunto no vacío de submódulos de M, al conjunto de submódulos que aparecen en la sucesión. Por 1, este conjunto tiene un elemento maximal, que además es un elemento de la sucesión, luego como la sucesión tiene un elemento maximal, se estaciona en dicho elemento. $2 \Rightarrow 1$: Sea $C \neq \emptyset$ un conjunto de submódulos de M sin elemento maximal.Como $C \neq \emptyset$, $\exists S_1 \in C$, y como S_1 no es maximal, entonces existe $S_2\ inC$ tal que $S_1 \subset S_2$ y la inclusión es estricta. De esta manera (inductivamente) podemos obtener una sucesión de elementos $S_i \in C$ tales que $S_i \subset S_{i+1}$ y las inclusiones son estrictas. Pero esto es absurdo, porque la sucesión no se estacionaría.

Veamos ahora que 1 y 2 equivalen a la definición de noetheriano: Sea M que verifica 1, y N un submódulo de M, queremos ver que N es finitamente generado. Sea $C = \{$ submódulos de M de tipo finito contenidos en N$\}$. Como $0 \in C$, C es no vacío. Por 1, C tiene un elemento maximal que llamaremos N_0. Veamos que $N_0 = N$. Supongamos que son distintos, sea $x \in N - N_0$, y sea $N_0' = N_0 + \langle x \rangle$. Entonces N_0' es de tipo finito y N_0 está contenido estrictamente en N_0',absurdo pues N_0 es maximal. Luego $N_0 = N$.

Supongamos ahora que M es noetheriano y $N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_k \subset ...$ una cadena creciente de submodulos. Como es creciente, $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ es un submódulo y es finitamente generado porque M es noetheriano. Sean $x_1, ..., x_n \in N$ tales que $\langle x_1, ..., x_n \rangle = N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$, luego para cada $i = 1, ..., n$, $\exists k_i$ tal que $x_i \in N_{k_i}$. Si n_0 es el máximo de los k_i entonces como la sucesión es creciente, todos los $x_i \in N_k$ cada vez que $k \geq n_0$. Luego $N_k = N \ \forall k \geq n_0$ por lo que la cadena se estaciona.

Ejemplo.

1. Los A-módulos con un número finito de submódulos son noetherianos, por la proposición anterior ya que cualquier sucesión no vacía de submódulos creciente se estaciona dado que es finita.

2. Dado un cuerpo K, un espacio vectorial V es noetheriano si y solo si $dim_K(V) < \infty$ esto se ve también con la proposición anterior dado que cualquier cadena de subespacios creciente se estaciona porque la base es finita.

Observación 2.4. Como la propiedad de un A-módulo de ser noetheriano se enuncia en términos de todos los submódulos de M, resulta que un submódulo S de un A-módulo noetheriano es noetheriano. Por otro lado, los submódulos del cociente M/S de M están en correspondencia con los submódulos de M que contienen a S.Por lo tanto un cociente de un noetheriano tambien es noetheriano.

Proposición 2.5. Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Entonces:

1. M es noetheriano $\Rightarrow M'yM''$ son noetherianos.

2. $M'yM''$ son noetherianos $\Rightarrow$ M es noetheriano.

Demostración. Dado que $f : M' \to Im(f)$ es un isomorfismo ($M' \cong Im(f)$ e $Im(f)$ es un submódulo de M, y que g es un epimorfismo por lo que $M'' \cong M/Ker(g)$, el ítem 1 ya está demostrado.

Supongamos ahora que M'' y M' son noetherianos. Sea N un submódulo de M, queremos ver que es finitamente generado. Consideramos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to f^{-1}(N) \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Im(g|_N) \to 0$$

Como M'' y M' son noetherianos, tanto $Im(g)$ como $f^{-1}(N)$ son finitamente generados, por lo tanto N es finitamente generado (prop 3.1).

Observación 2.6. Ser noetheriano es una propiedad que se preserva por sumas directas finitas, ya que si $M_1, ..., M_n$ son módulos noetherianos, la sucesión exacta corta:

$$o \to M_1 \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=2}^{n} M_i \to 0$$

Y lo enunciado se sigue inductivamente.Sin embargo, ser noetheriano no se preserva por sumas directas infinitas ni por productos infinitos, por ejemplo $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano (ya que es principal) pero $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es noetheriano, en efecto, la cadena $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset ...$ es creciente y claramente no se estaciona.Luego como $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es un submódulo de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, entonces $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es noetheriano.

Definición 2.7. Un anillo se dirá anillo noetheriano si y solo si A es un A-módulo noetheriano.

Proposición 2.8. Sea A un anillo noetheriano, M un A-módulo de tipo finito, entonces M es noetheriano.

Demostración. Como M es de tipo finito, existe un epimorfismo $f : A^n \to M$ para algún $n \in \mathbb{N}$.Ahora bien $A^n = \bigoplus_{i=1}^{n} A$, y A es un A-módulo noetheriano. Por la observación anterior, ser noetheriano se preserva por sumas directas finitas, luego A^n es noetheriano y como f es un epimorfismo, M es noetheriano.

Teorema 2. (Hilbert) Sea A un anillo noetheriano, entonces A[x] es un anillo noetheriano.

Demostración. Sea J un ideal de A[x], queremos ver que J es finitamente generado sobre A[x]. Consideramos para eso el siguiente ideal de A:

Sea $I = \{a \in A / \exists p \in J \subset A[x] \text{ con } p = a.x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\}$, es decir,I es el ideal de coeficientes principales de los polinomios de J.

Veamos primero que es un ideal a izquierda (recordar que los ideales a izquierda se corresponden con los A-submódulos a izquierda de tipo finito).

Sean $a, a' \in I$, existen $p, p' \in J$ con $p = a.x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$ y $p' = a'.x^{m'} + \sum_{i=0}^{m'-1} a'_i x^i$.Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m \geq m'$ (sino se multiplica a p por alguna potencia de x suficientemente grande) y resulta entonces que $a + a'$ es el coeficiente principal del polinomio $p + x^{m-m'}.p'$ que pertenece a J y por lo tanto $a + a' \in I$.

Si $b \in I$ y $a \in A$, sea p un polinomio en J con coeficiente principal b, entonces $a.p \in J$ y por lo tanto $a.b \in I$. Ahora bien como I es un ideal a izquierda de A, y A es noetheriano, I es finitamente generado sobre A. Sean $a_1, ..., a_r$ un sistema de generadores (sobre A) de I, y sean $p_1, ..., p_r$ polinomios en J tal que el coeficiente principal de cada p_i es a_i, los cuales supondremos todos del mismo grado m, (sino se multiplica a cada p_i por $x^{m-grad(p_i)}$ donde m es el máximo de los grados de los p_i). Estos polinomios "casi generan" J, en efecto:

Sea N el A-módulo formado por los elementos de J de grado menor que m, es decir $N = J \bigcap A_{<m}[x]$. J estará generado por los p_i "a menos de N". Como $A_{<m}[x]$ es un A-módulo de tipo finito, A es noetheriano y $N \subset A_{<m}[x]$ es un submódulo, entonces N es finitamente generado como A-módulo. Ahora bien sea $q_1, ..., q_s \subset N$ un sistema de generadores de N sobre A, veremos que J está generado por $p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_s$. En efecto sea p un polinomio de J, si $gra(p) < m$ entonces $p \in N = \langle q_1, ..., q_s \rangle_A \subset \langle q_1, ..., q_s \rangle_{A[x]}$.

Si $gra(p) = g \geq m$ haremos una razonamiento inductivo. Sea a el coeficiente principal de p, luego $a \in I$ y se lo puede escribir como $a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$ donde $\lambda_i \in A$ y los a_i son los generadores de I. Ahora bien, los a_i son los coeficientes principales de los p_i que tienen todos grado $m \leqslant g$, luego el polinomio $\overline{p} = x^{g-m}.\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ pertenece a J y tiene como coeficiente principal a a, de hecho, $\overline{p} \in \langle p_1, ..., p_r \rangle_{A[x]}$. Luego el polinomio $p - \overline{p}$ pertenece a J y su grado es menor estricto que el grado de p, luego por hipótesis inductiva este polinomio pertenece al ideal generado por $p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_s$. Como $\overline{p} \in \langle p_1, ..., p_r \rangle_{A[x]} \subset \langle p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_s \rangle$ y despejando p resulta que también está en el generado por esos polinomios. $(p - \overline{p} + \overline{p} = p)$

Corolario 3.

1. Si A es un anillo noetheriano, entonces A$[x_1, ..., x_n]$ es anillo noetheriano, en particular, para K cuerpo, K$[x_1, ..., x_n]$ es noetheriano.
2. Sea B un anillo y A un subanillo de B que es noetheriano como anillo. Supongamos que existe un $b \in B$ tal que b conmuta con los elementos de A y b genera a B como A-álgebra, es decir, todo elemento de B se escribe como combinación lineal de potencias de b(incluido $1 = b^0$) con coeficientes en A. Entonces B es noetheriano. Lo mismo se puede decir de B si estuviera generado como A-álgebra por finitos elementos que conmuten entre si.

Demostración.

1. Por inducción sobre n, sabemos por el teorema que $A[x]$ es noetheriano, supongamos que es válido para $n \in \mathbb{N}$ lo probaremos para $n + 1$. Sea $A[x_1, ..., x_{n+1}]$ entonces este anillo en $n + 1$ indeterminadas, puede ser definido recursivamente como $A[x_1, ..., x_n][x_{n+1}]$. Luego por hipótesis inductiva, $A[x_1, ..., x_n]$ es noetheriano, y por lo tanto, $A[x_1, ..., x_{n+1}]$ también nos queda noetheriano.
2. Sea $b \in B$ que genera a B como A-álgebra. La definición de "genera como A-álgebra" es equivalente a que el morfismo de anillos $ev_b : A[x] \to B$ $(p \mapsto p(b))$ sea suryectivo. Como A es noetheriano, por el teorema anterior, A[x] es noetheriano. Luego B es un anillo noetheriano porque existe un epimorfismo de anillos noetheriano en B. Para el caso de varios generadores, debemos considerar $A[x_1, ..., x_n]$ que también será noetheriano por el item anterior.

Ejemplo 4. Sea $d \in \mathbb{Z}$ un número que no es cuadrado, $\sqrt{d}$ una raíz compleja de d y sea $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = a + b.\sqrt{d}/\ a, b \in \mathbb{Z}$. Este subconjunto de $\mathbb{C}$ de hecho es un subanillo de $\mathbb{C}$, en efecto si $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = a' + b'\sqrt{d}$, $\alpha.\beta = (a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d}) = a.a' + (ab' + ba' + bb')\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Por otro lado, existe un epimorfismo de anillos $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ determinado por $(x \mapsto \sqrt{d})$. como $\mathbb{Z}$ es noetheriano, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ resulta un anillo noetheriano.

2.2. Módulos Artinianos

Los módulos artinianos se suelen presentar dentro del marco de una teoría dual a la teoría de módulos noetherianos. Dado un A-módulo M, cuál es la afirmación dual a M es finitamente generado? Observemos que decir que M sea de tipo finito, es equivalente a decir que existe un $n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $\pi : A^n \to M$ donde el sistema de generadores corresponde a tomar $\{\pi(e_1), ..., \pi(e_n)\}$. Si consideramos un A-módulo arbitrario M, siempre existe un conjunto I y un epimorfismo $A^{(I)} \to M$ pues siempre existe un sistema de generadores (como $I = M$). El hecho de que M sea finitamente generado nos permite extraer un subconjunto finito de I, de digamos n elementos, de manera que la proyección $A^n \to M$ siga siendo un epimorfismo. Más aún se puede cambiar el módulo que aparece sumado con el índice I (es decir A) para pasar a un enunciado mas genérico:

Proposición 2.9. Sea M un A-módulo, son equivalentes:

1. M es finitamente generado.
2. Si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de A-módulos y $f : \bigoplus_{i\in I} N_i \to M$ es un epimorfismo, entonces existe $F \subset I$ subconjunto finito tal que $f|_{\oplus_{i\in F}N_i} : \bigoplus_{i\in F} N_i \to M$ es un epimorfismo.

Demostración. $2 \Rightarrow 1$. Consideremos la familia $\{A_m\}_{m\in M}$ de A-módulos con $A_m = A$ y el epimorfismo $f : A^{(M)} \to M$ dado por $f(e_m) = m$. ($A^{(M)} = \bigoplus_{m\in M} A_m$)
Entonces existe $F \subset M$ subconjunto finito tal que $f|_{\oplus_{m\in F}A_m} : \bigoplus_{m\in F} A_m \to M$ es un epimorfismo. Luego hemos obtenido un epimorfismo $g : A^l \to M$ con $|F| = l$ y por lo tanto M es finitamente generado por el sistema de generadores $\{g(e_1), ..., g(e_l)\}$.
$1 \Rightarrow 2$. Sea $f : \bigoplus_{i\in I} N_i \to M$ un epimorfismo, y sean $\{m_1, ..., m_r\}$ un sistema de generadores de M. Por cada m_k existe un $z^k = (z_i^k)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ tal que $f((z_i^k)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f(z_i^k) = m_k (k = 1, ..., r)$. Ahora bien como $z^k = (z_i^k)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} N_i$, cada z^k es combinación lineal finita de elementos de N_i. Sea F la unión para $k = 1, ..., r$ de los índices $i \in I$ tales que los z_i^k son no nulos. Si tomamos ahora $f|_{\oplus_{i\in F}N_i} : \bigoplus_{i\in F} N_i \to M$, como los $z^k \in \oplus_{i\in F}N_i$ entonces los $m_k \in Im(f|_{\oplus_{i\in F}N_i})$, y se tiene un epimorfismo porque los m_k generan M.

Definición 2.10. Diremos que un A-módulo es finitamente cogenerado si dada una familia arbitraria de A-módulos $\{N_i\}_{i\in I}$ y un monomorfismo $f = \prod_{i\in I} f_i : M \to \prod_{i\in I} N_i$, entonces existe un subconjunto finito $F \subset I$ tal que $f = \prod_{i\in F} f_i : M \to \prod_{i\in F} N_i$ es un monomorfismo.

Definición 2.11. Se dice que un A-módulo es artiniano si y solo si todo cociente de M es finitamente cogenerado. El anillo A se dirá un anillo artiniano en caso de que A sea artiniano como A-módulo.

Ejemplo 5. $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo artiniano. En efecto dado $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, 1, -1$, la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/\langle a^n \rangle$ definida por $x \mapsto \{\overline{x}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un monomorfismo, porque si $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \neq 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|m| < |a^n|$ luego la clase de m módulo a^n será distinta de la clase del cero, por lo que $f(m) \neq \{\overline{0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto f es un monomorfismo. Sin embargo, dado cualquier subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$, la aplicación $g : \mathbb{Z} \to \prod_{n\in\mathbb{F}} \mathbb{Z}/\langle a^n \rangle$ no es un monomorfismo, pues si consideramos $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tal que $|m| > |a^{n_1}|$ con n_1 el máximo de los $n \in F$ y tal que $\overline{m} \equiv_{a^{n_1}} \overline{0}$, entonces $\overline{m} \equiv_{a^n} \overline{0}$ para todo $n \in F$ por lo que $g(m) = \{\overline{0}\}_{n\in F}$ con $m \neq 0$ y por lo tanto g no es un monomorfismo.

A continuación daremos propiedades equivalentes a la definición de módulo artiniano, que permitirán encontrar mas facilmente ejemplos de tales módulos.

Proposición 2.12. Si M es finitamente cogenerado, entonces M tiene la siguiente propiedad:

- Para toda familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de A-submódulos de M, si $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$ implica que existe un subconjunto finito $F \subset I$ con $\bigcap_{i\in F} M_i = 0$

Demostración. Como M es finitamente cogenerado, y los M_i son submódulos de M para todo $i \in I$, el morfismo $\pi = \prod_{i\in I} \pi_i : M \to \prod_{i\in I} M/M_i$ está bien definido y además es inyectivo. Mas aún existe un subconjunto finito $F \subset I$ tal que el morfismo $\pi' = \prod_{i\in F} \pi_i : M \to \prod_{i\in F} M/M_i$ es inyectivo. Por otro lado, las funciones $\pi_i : M \to M/M_i$ cumplen que $M_i \subset Ker(\pi_i)\ \ \forall i \in I$.
De estos dos hechos, y combinando con la proposición (2.2), se deduce el resultado. En efecto, como $M_i \subset Ker(\pi_i)$, $\bigcap_{i\in F} M_i \subset Ker(\pi')$, pues si $x \in \bigcap_{i\in F} M_i,\ \pi'(x) = \overline{x}$ que coincide con la clase del 0 en los M/M_i si $i \in F$. Luego como π' es inyectiva, $Ker(\pi') = 0$ (2.2) y entonces $\bigcap_{i\in F} M_i = 0$.

Reciprocamente, si M verifica la propiedad anterior entonces M es finitamente cogenerado.

Demostración. Sea $f : M \to \prod_{i\in I} N_i$ un monomorfismo, $M \xrightarrow{f} \prod_{i\in I} N_i \xrightarrow{g_{i_0}} N_{i_0}$ una composición de morfismos, y sea M_{i_0} el núcleo de dicha composición. Entonces $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$. En efecto si $x \in \bigcap_{i\in I} M_i,\ (g_i f)(x) = 0$ para cada $i \in I$ pero como f es monomorfismo, implica que $(f(x)_i)_{i\in I} = 0$ por lo que $f(x) = 0$.Luego $x = 0$. Aplicando la hipótesis existe $F \subset I$ finito tal que $\bigcap_{i\in F} M_i = 0$ esto nos dice que

$\overline{f} : M \to \prod_{i\in F} N_i$ es un monomorfismo. En efecto supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $\overline{f}(x) = 0$ luego x debe pertenecer al núcleo de la composición
$M \xrightarrow{f} \prod_{i\in F} N_i \xrightarrow{g_{i_0}} N_{i_0}$ para cada $i \in F$ es decir $x \in \bigcap_{i\in F} M_i$ lo cual es absurdo.

Ahora veremos algunas condiciones equivalentes a ser artiniano.

Proposición 2.13. Sea M un A-módulo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M es artiniano.
2. (Condición de cadena descendente) Toda cadena decreciente de submódulos de M se estaciona.
3. Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento minimal.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que M es artiniano y sea C una cadena decreciente $L_1 \supset L_2 \supset ...$ de submódulos de M. Sea $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n$, que es el núcleo de la aplicación $\pi : \prod_{n\in\mathbb{N}} \pi_n : M \to \prod_{n\in\mathbb{N}} M/L_n$. Consideremos la aplicación inducida $M/K \to \prod_{n\in\mathbb{N}} M/L_n$ que es un monomorfismo. Como M/K es finitamente cogenerado, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $M/K \to \prod_{n<m} M/L_n$ es monomorfismo. Luego, $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n = \bigcap_{n<m} L_n = L_{m-1}$. Por lo tanto a partir de $L_m - 1$ la cadena se estaciona.
$2 \Rightarrow 3$. Supongamos que M verifica la condición de cadena descendente y sea S un subconjunto no vacío de submódulos de M. Supongamos que S no tiene elemento minimal, entonces $\forall L \in S$ el conjunto $\mathbb{L}_1 = \{L' \in S/L' \subset L,\ L' \neq L\}$ es no vacío. Fijando un L arbitrario, sea $L_0 = L$ y L_1 un elemento de $\mathbb{L}_1$, como L_1 no es minimal, el conjunto $\mathbb{L}_2 = \{L'' \in S/L'' \subset L_1,\ L1 \neq L''\}$ es no vacío. Sea L_2 un elemento de $\mathbb{L}_2$, como L_2 no es minimal podemos seguir definiendo conjuntos no vacíos de manera que la cadena $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset ...$ no se estaciona, lo cual es absurdo. Por lo tanto S tiene algún elemento minimal.
$3 \Rightarrow 1$. Supongamos que todo conjunto no vacío de submódulos de M tenga un submódulo minimal, queremos probar que todo cociente de M es finitamente cogenerado. Sea $K \subset M$ un submódulo y $f : M/K \to \prod_{i\in I} N_i$ un monomorfismo. Sea M_{i_0} el núcleo de la composición $J_{i_0} : M \xrightarrow{f} M/K \xrightarrow{g} \prod_{i\in I} N_i \xrightarrow{h_{i_0}} N_{i_0}$ se cumple que $K = \bigcap_{i\in I} M_i$. En efecto, sea $x \in K$, $f(x) = \overline{0}$ (es decir la clase de K en M/K) por lo que $x \in M_{i_0}$ pero esto puede hacerse para cada $i \in I$ por lo que $x \in \bigcap_{i\in I} M_i$. Ahora bien si $x \in \bigcap_{i\in I} M_i$, x está en el núcleo de J_i para cada $i \in I$, es decir $(h_i g f)(x) = 0 \in N_i$ la coordenada i-ésima de $(gf)(x) = 0$. Como esto puede hacerse para cada $i \in I$, resulta que $(gf)(x) = 0$ en $\prod_{i\in I} N_i$, pero como g es un monomorfismo, esto nos dice que $f(x) = 0$. Luego $x \in K$.

Bastará probar entonces que si $K \subset M$ es un submódulo y S es una colección de submódulos de M con $K = \bigcap_{M' \in S} M'$ entonces $K = \bigcap_{j=1}^{n} M'_j$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y elementos $M'_j \in S$.
Sea $P = \{\bigcap_{M' \in F} M' : F \subset S$ es un conjunto finito$\}$ Por la propiedad 3, P tiene un elemento minimal correspondiente a un F_0, luego $K = \bigcap\limits_{M' \in F_0} M'$ con F_0 finito. El hecho de que $K = \bigcap\limits_{i \in F} M_i$ hace que la aplicación $J_i : M/K \to \prod\limits_{i \in F} N_i$ sea un monomorfismo, ya que puedo utilizar el mismo argumento anterior para la composición $J_{i_0} : M \xrightarrow{f} M/K \xrightarrow{g} \prod\limits_{i \in F} N_i \xrightarrow{h_{i_0}} N_{i_0}$ y es necesario que g sea un monomorfismo para poder deducir la condición sobre K. En efecto si g no es un monomorfismo, existe un $y \neq 0$ $(y = f(x))$ tal que $g(y) = 0$ entonces como $y \neq 0$, x no pertenece a K, pero $x \in \bigcap\limits_{i \in F} M_i$ lo cual es absurdo.

Observación 2.14. El núcleo de la aplicación $\pi : \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \pi_n : M \to \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} M/L_n$ es $K = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} L_n$.

Demostración. Sea $x \in K = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} L_n$ claramente $\pi(x) = 0$ pues $\pi(x) = (\overline{x}_i)_{i \in I}$ y $x \in L_i$ por lo que $(\overline{x}_i) = 0 \ \forall i \in I$.
Si $x \in Ker(\pi)$ entonces $\pi(x) = (\overline{x}_i)_{i \in I} = 0$ lo que nos dice que $\overline{x}_i = 0$ en cada M/L_i por lo tanto $x \in L_i \ \forall i \in I$.

Ejemplo 6.

1. $\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong G_{p^\infty} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} G_{p^n}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo artiniano, dado que sus únicos submódulos son $\{1\}$, G_{p^∞}, y $(G_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$ que estan todos encajados. Ahora bien como los G_{p^n} son finitos, toda cadena descendente de submódulos se estaciona.

2. Si K es un cuerpo y V un K-espacio vectorial, V es artiniano si y solo si es de dimensión finita, en efecto si tomamos cualquier cadena decreciente de submódulos (subespacios) se estaciona dado que tienen una base finita.

Una de las propiedades mas importantes de los módulos noetherianos y artinianos es que admiten una descomposición en suma directa finita de submódulos indescomponibles, lo cual no es cierto si el módulo es solamente de tipo finito. Un módulo se dice indescomponible si no admite sumandos directos propios.

Proposición 2.15. Sea M un A-módulo noetheriano (o artiniano) no nulo. Entonces existen submódulos indescomponibles $M_1, ..., M_n$ tales que $M \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$.

Demostración. Sea $M \neq 0$, si M es indescomponible no hay nada que probar, si no, supongamos que M no cumple con la propiedad del enunciado. Luego existe M' un sumando directo propio de M que no tiene una descomposición en suma directa finita de submódulos indescomponibles (este submódulo existe porque sino

M cumpliría la propiedad). Como M' es un módulo no nulo noetheriano (es submódulo de un noetheriano) y no es suma directa finita de indescomponibles, entonces existe M'' un sumando directo propio de M' que no tiene una descomposición en suma directa finita de indescomponibles. Llamemos N' al complemento de M'' es decir $M = N' \oplus M,\ M' = N'' \oplus M''$. Mediante este proceso se consiguen cadenas de submódulos propios

$$M \supset M' \supset M'' \supset ... \quad y \quad N \subset N \oplus N' \subset N \oplus N' \oplus N'' \subset ...$$

que no se estacionan, por lo que M no es ni noetheriano ni artiniano, lo cual es absurdo.

Referencias

[1] Farinati, M.A., Solotar, A.L. , *Anillos y sus categorías de representaciones.*