Convergencia uniforme.

Definición 1. Una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}_n$, que se suponen definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, converge uniformemente a $f(z)$ en $\mathcal{D} \subset \Omega$ si

> para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $n > n(\varepsilon)$ y para todo $z \in \mathcal{D}$.

La definición anterior es equivalente al siguiente resultado:

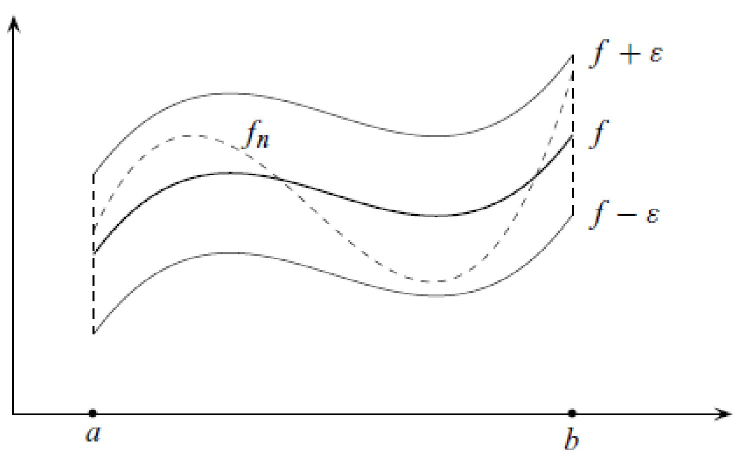
> $\{f_n(z)\}_n$ converge uniformemente a $f(z)$ en $\mathcal{D}$ si, y solo si, $\sup_{z\in\mathcal{D}} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

En lo que sigue, supondremos que las f_n son funciones reales definidas en un intervalo I.

Para comprender bien la definición anterior, analicemos el último límite. Tendremos que, para cualquier $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se quiera),

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in I \Leftrightarrow -\varepsilon \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon \ \forall x \in I,$$

cuya interpretación gráfica es la siguiente (suponiendo que $I = [a, b]$):



Es decir, la gráfica de la función f_n queda dentro de un *tubito* centrado en la gráfica de f de *ancho* 2ε.

En la práctica, para estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n(x)\}_n$ en $I \subset \mathbb{R}$, lo que se hace es calcular el máximo absoluto de $|f_n(x) - f(x)|$ en I. Supongamos que este máximo se alcanza en un punto $x_n \in I$; entonces, haciendo $\beta_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$, tendremos que $\{f_n(x)\}_n$ converge uniformemente a $f(x)$ en I, si, y solo si, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Ejemplo 1.

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ en $\mathbb{R}$.

Es claro que, si

$|x| < 1$, $x^{2n} \to 0 \Rightarrow$ la sucesión converge a 0,

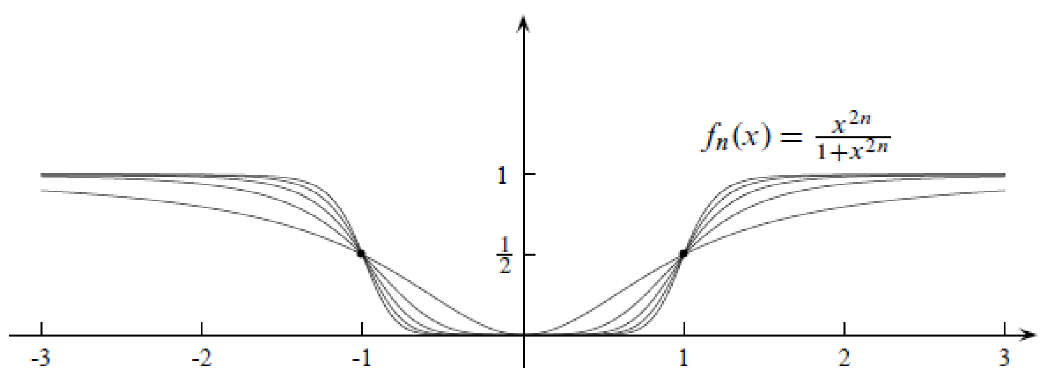
$|x| = 1$, $x^{2n} = 1 \Rightarrow$ la sucesión converge a $1/2$,

$|x| > 1$, $x^{2n} \to \infty \Rightarrow$ la sucesión converge a 1.

Luego, el campo de convergencia es $\mathbb{R}$ y la función límite puntual será

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{si } |x| = 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

La función límite es discontinua (tiene discontinuidades tipo salto en -1 y en 1) a pesar que todas las funciones de la sucesión son continuas (ver figura).



Propiedad 1. Si una sucesión de funciones continuas $\{f_n(x)\}_n$ converge uniformemente a $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, la función límite también será continua en $[a, b]$.

A partir del resultado anterior, podemos concluir que la sucesión de este ejemplo no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.

Estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ en $[0, \infty)$ y en intervalos de la forma $[a, \infty)$, con $a > 0$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} n^2 (e^{-x})^n = 0$ (es una sucesión de la forma $n^k \lambda^n$, con $|\lambda| < 1$). Por lo tanto, si $x \geq 0$, la sucesión converge puntualmente a $f(x) = 0$.

Para estudiar la convergencia uniforme, observemos primero que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ para todo $x \geq 0$. Es fácil comprobar que

$$f_n'(x) > 0 \quad \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad f_n'(x) < 0 \quad \text{para } x > \frac{1}{n}.$$

Luego, $f_n(x) \leq f_n(1/n)$ para todo $x \geq 0$. Concluimos entonces que

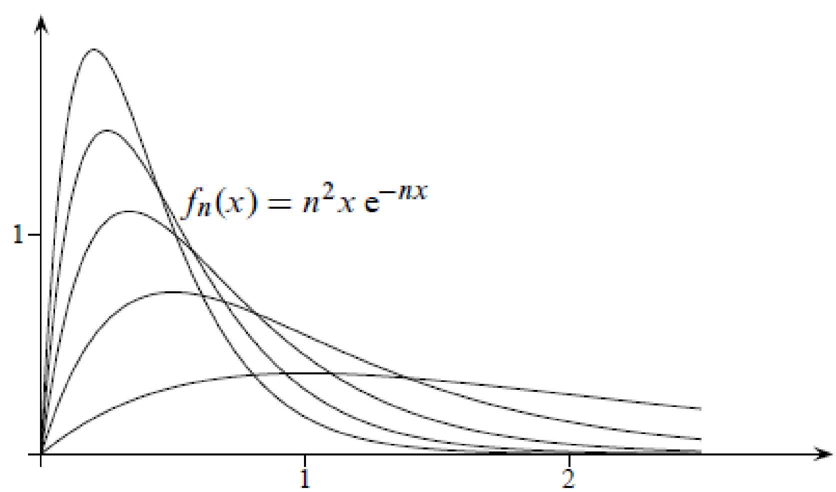
$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \nrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

por lo tanto, no hay convergencia uniforme en $[0, \infty)$.

Elijamos $a > 0$; habrá convergencia uniforme en intervalos de la forma $[a, \infty)$?. Del análisis anterior, sabemos que $f_n(x)$ es estrictamente decreciente en $[1/n, \infty)$ (ver figura). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < a$; entonces para todo $n \geq n_0$, tendremos que $[a, \infty) \subset [1/n, \infty)$ y, por lo tanto,

$$\max_{x\in[a,\infty)} f_n(x) = f_n(a) = \frac{an^2}{e^{an}} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Luego, la convergencia es uniforme en $[a, \infty)$.



Propiedad 2. Si una sucesión de funciones continuas $\{f_n(x)\}_n$ converge uniformemente a $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Consideremos nuevamente la sucesión del ejemplo anterior; tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx}\, dx = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{n+1}{e^n} = 1 \neq 0 = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} n^2 x e^{-nx})\, dx.$$

Es decir, no se puede permutar integración con el límite puntual; luego, la convergencia no es uniforme en $[0, 1]$.

Ejemplo 3.

Estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ en $\mathbb{R}$.

Es evidente que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$, basta tomar $n(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ para probar que

$$\left| \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} - 0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, por definición, la sucesión converge uniformemente a $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}$.

Observemos que las funciones que componen la sucesión son derivables en $\mathbb{R}$. Será cierto que la sucesión de las funciones derivadas converge a la derivada de la función límite?

Propiedad 3. Sea $\{f_n(x)\}_n$ una sucesión de funciones continuamente derivables que converge a $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Si la sucesión $\{f_n'(x)\}_n$ converge uniformemente a una función $\varphi(x)$ en $[a, b]$, la función $f(x)$ es derivable y

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

En el caso del ejemplo anterior, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ para $x \in \mathbb{R}$. En particular, $f_n'(0) = \sqrt{n}$ y, por lo tanto, $\{f_n'(0)\}_n$ no converge. Sin embargo, $f'(0) = 0$.