Ecuaciones de evolución para el $p-$Laplaciano fraccionario.

JULIO D. ROSSI

con J. M. Mazón, J. Toledo (U. Valencia)

http://mate.dm.uba.ar/∼jrossi

Ecuaciones de evolución no locales.

Sea $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, radial, nonegativa, suave y tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(r)dr = 1.$$

Ecuación de difusión no local

$$u_t(x,t) = J * u - u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y,t)dy - u(x,t).$$

Ecuaciones de evolución no locales.

Un posible modelo es pensar que $u(x,t)$ es la densidad de individuos en x en tiempo t y $J(x-y)$ es la probabilidad de saltar de y a x. Entonces

$$(J*u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y,t)dy$$

es la tasa a la cual llegan individuos a x desde otros lugares y

$$-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(x,t)dy$$

es la tasa a la cual dejan x para ir a otros lugares.

Dominios acotados.

Problemas

(1). Problemas de Neumann (flujo cero)

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy, \qquad x \in \Omega.$$

(2). Problemas de Dirichlet (densidad cero fuera)

$$u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy, \qquad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0 \qquad x \notin \Omega.$$

Estas ecuaciones de difusión tienen propiedades parecidas a la ecuación del calor

$$u_t = \Delta u.$$

Laplaciano fraccionario.

Para el Laplaciano usual Δu, aplicando la transformada de Fourier se tiene

$$\widehat{\Delta u}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi),$$

y entonces resulta natural definir $(\Delta u)^s$ por la formula

$$\widehat{(\Delta u)^s}(\xi) = -|\xi|^{2s} \widehat{u}(\xi).$$

Para este operador hay una representación no local,

$$\Delta^s u(x) = p.v \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}} (u(y) - u(x)) dy.$$

Nuestro problema.

El problema de evolución para el $p-$Laplaciano no local

$$u_t(x,t) = p.v \int_B J(x-y)|u(y,t)-u(x,t)|^{p-2}(u(y,t)-u(x,t))dy$$

con núcleo singular

$$J(x-y) = \frac{1}{|x-y|^{N+sp}}, \qquad 0 < s < 1, \ 1 \leq p < \infty.$$

Los tres problemas: - Cauchy - Neumann - Dirichlet

Existencia y unicidad, Comportamiento asintotico, límites cuando $s \nearrow 1$ (para recuperar problemas locales $u_t = \mathbf{div}(|Du|^{p-2}Du)$).

Obs.

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$$

es el operador asociado al funcional

$$F(u) = \int \frac{|Du|^p}{p}.$$

Análogamente

$$\Delta_p^s u := p.v \int_B J(x-y)|u(y)-u(x)|^{p-2}(u(y)-u(x))dy$$

está asociado con el funcional

$$G(u) = \frac{1}{2p}\int_B\int_B J(x-y)|u(y)-u(x)|^p dy\, dx$$

Resultados (Dirichlet)

Teorema *Para todo* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *existe una única solución fuerte*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta_p^s u(t,x) & \textit{en } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0 & \textit{en } (0,T)\times(\mathbb{R}^N\setminus\Omega), \\ u(0,x) = u_0(x) & \textit{en } \Omega. \end{cases}$$

Además, se tiene un principio de contracción:

$$\int_\Omega (u_1(t) - u_2(t))^+ \leq \int_\Omega (u_{1,0} - u_{2,0})^+ \qquad t \in (0,T).$$

Resultados (Dirichlet)

Teorema *Para* $q \geq p \geq 1$ *y* $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ *se tiene*

$$\|u(t)\|^q_{L^q(\Omega)} \leq C \frac{\|u_0\|^{q-p}_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}}{t},$$

con $C = C(\Omega, N, s, p)$.

Para el problema de Neumann se tienen resultados similares, pero las soluciones van a la media del dato inicial, $(u_0)_\Omega$,

$$\|u(t) - (u_0)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(C \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}{t} \right)^{1/p}.$$

Resultados (Dirichlet). $s \nearrow 1$

Consideramos el límite $s \to 1-$ en estos problemas no-locales

$$\begin{cases} u_t(t,x) = L_{p,s}\Delta_p^s u(t,x), & \text{en } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, & \text{en } (0,T)\times(\mathbb{R}^N\setminus\Omega), \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $L_{p,s} = \frac{2}{K_{p,N}}(1-s)$, $K_{p,N} = \frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} |e_1\cdot\sigma|^p d\mathcal{H}^{N-1}(\sigma)$.

Teorema

$$\lim_{s\to 1^-}\sup_{t\in[0,T]} \|u_s(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

donde v es la solución de

$$\begin{cases} v_t(t,x) = \Delta_p v(t,x), & \textit{en } (0,T)\times\Omega, \\ v(t,x) = 0, & \textit{en } (0,T)\times\partial\Omega, \\ v(0,x) = u_0(x), & \textit{en } \Omega, \end{cases}$$

Resultados (Dirichlet). $s \nearrow 1$

Vale el mismo resultado de paso al límite para el problema de Neumann. En este caso en problema límite es,

$$\begin{cases} v_t(t,x) = \Delta_p v(t,x), & \text{en } (0,T) \times \Omega, \\ |\nabla v(t,x)|^{p-2} \nabla v(t,x) \cdot \nu(x) = 0, & \text{en } (0,T) \times \partial\Omega, \\ v(0,x) = u_0(x), & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Ideas de las demostraciones.

Usamos Teoria de Semigrupos. La idea para resolver

$$u_t + A(u) = 0$$

es considerar límites de discretizaciones (Euler implícito)

$$u_{n+1} = u_n - \tau A(u_{n+1})$$

Def. u es una solución *Mild* si es límite de estas aproximaciones cuando $\tau \to 0$.

Observemos que hay que asegurar que el problema

$$u_{n+1} + \tau A(u_{n+1}) = u_n$$

tiene una única solución.

Ideas de las demostraciones.

Def A es *accretivo* si

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x} + \tau(y - \hat{y})\|, \quad \text{para } \tau > 0 \text{ y } (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A.$$

Se tiene
"A es acretivo si y solo si $(I + \tau A)^{-1}$ *es univaluado y no-expansivo para todo* $\tau > 0$*"*

Si estamos en un espacio de Hilbert, A en H es accretivo si y solo si

$$\langle x - \hat{x}; y - \hat{y} \rangle \geq 0 \qquad (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A,$$

es decir, A es monótono.

Ideas de las demostraciones.

Para asegurar existencia de solución de $u_{n+1} + \tau A(u_{n+1}) = u_n$ hace falta la *condición rango.*

Def A se dice $m-$accretivo si A is accretivo y

$$R(I + \tau A) = H \qquad \forall \tau > 0.$$

Teorema (Crandall-Liggett) Si A es $m-$accretivo, entonces hay solución mild (se dice que A genera un semigrupo de contracciones (e^{-tA}), $t \geq 0$ en $D(A)$).

Ideas de las demostraciones.

Ahora hay que asegurar solución fuerte (la derivada temporal de una solución mild, u, existe).

Teorema (Brezis-Pazy) Sea $\Phi : H \mapsto (-\infty, +\infty]$ propio, convexo y debil semi-continuo tal que $\min \Phi = 0$, si $u_0 \in D(\partial\Phi)$, entonces la solución mild de

$$u_t + \partial\Phi(u) = 0, \qquad u(0) = u_0,$$

es una solución fuerte.

Ideas de las demostraciones.

En nuestro caso tenemos A dado por

Def $A = D_{p,s}$

$$(u,v) \in D_{p,s} \iff \begin{array}{l} u, v \in L^2(\Omega) \text{ y } u \text{ es solucion de} \\ \begin{cases} -\Delta_p^s u = v & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \end{array}$$

Obs: $D_{p,s} = \partial \mathcal{D}_p^s$ con

$$\mathcal{D}_p^s(u) := \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}} |u(y) - u(x)|^p \, dx \, dy.$$

Ideas de las demostraciones.

Para ver que $D_{p,s}$ es m-accretivo in $L^2(\Omega)$, hay que ver la condición rango

$$L^2(\Omega) \subset R(I + D_{p,s}).$$

Para esto, dada $f \in L^2(\Omega)$, la clave es considerar el problema variacional

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \mathcal{D}_p^s(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega fu$$

y probar que tiene un único minimizante.

Ideas de las demostraciones.

Para ver el decaimiento de las soluciones primero observamos que las normas L^r decrecen con t,

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u(\tau)\|_{L^r(\Omega)}, \qquad t \geq \tau.$$

Ahora usamos la siguiente desigualdad de Sobolev-Poincaré:

$$\int_\Omega |u(t,x)|^p \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t,y) - u(t,x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \, dy \, dx,$$

para obtener

$$\int_\Omega |u(t,x)|^q \, dx \leq C \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{q-p} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t,y) - u(t,x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \, dy \, dx,$$

Ideas de las demostraciones.

Entonces

$$t\int_\Omega |u(t,x)|^q\,dx \le \int_0^t\int_\Omega |u(\tau,x)|^q\,dx\,d\tau$$

$$\le C\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{q-p}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(\tau,y)-u(\tau,x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dy\,dx\,d\tau.$$

Por otra parte, multiplicando por u la ecuacíon e integrando, se obtiene

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(\tau,y)-u(\tau,x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,d\tau \le \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Y se concluye

$$\int_\Omega |u(t,x)|^q\,dx \le C\frac{\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{q-p}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{t}.$$

Ideas de las demostraciones.

Finalmente, para ver el límite $s \nearrow 1$, consideramos los funcionales $\Phi_s, \Phi : L^2(\Omega) \to [0, \infty[$ dados por

$$\Phi_s(u) = L_{p,s}\mathcal{D}_p^s(u) = \left\{ \frac{1-s}{pK_{p,N}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right.$$

y

$$\Phi(u) := \left\{ \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \right.$$

y probamos la convergencia Mosco de los functionales Φ_s a Φ

Ideas de las demostraciones.

Es decir, probamos que

$$\forall\, u \in \mathrm{Dom}(\Phi)\ \ \exists u_n \in \mathrm{Dom}(\Phi_s) : u_s \to u \ \text{ y }\ \Phi(u) \geq \limsup_{s\to 1} \Phi_s(u_s);$$

y

$$\text{si } u_s \rightharpoonup u \quad \text{entonces} \ \ \Phi(u) \leq \liminf_{s\to 1} \Phi_s(u_s).$$

Y gracias a esto y a un resultado general de Brezis-Pazy y Attouch concluimos la convergencia de las soluciones de los problemas de evolución

$$\lim_{s\to 1^-} \ \sup_{t\in[0,T]} \|u_s(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Posibles continuaciones.

Problemas

(1). Totalmente no-local (con Gaston Beltritti)

$$0 = \int\int J(x-y, t-s)|u(y,s)-u(x,t)|^{p-2}(u(y,s)-u(x,t))\, dy\, ds$$

para $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$. Con dato $u(x,t) = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t \leq 0$.

(2). Límites cuando $p \to \infty$ (pilas de arena).

$$u_t(x,t) - f(x,t) \in \partial I_s(u(x,t)$$

con

$$I_s(u) = \begin{cases} 0 & |u(x)-u(y)| \leq |x-y|^s, \\ +\infty & \text{si no .} \end{cases}$$

Posibles continuaciones.

Problemas

(3). Problemas de frontera libre (diseño óptimo) (con Joao Vitor Da Silva)

$$Min \frac{1}{2p} \int \int J(x-y)|u(y)-u(x)|^p \, dy \, dx,$$

con

$$u(x) = 1 \qquad \mathbb{R}^N \setminus \Omega,$$

y con una restricción de volumen

$$|\{u(\cdot) > 0\} \cap \Omega| \leq \alpha.$$