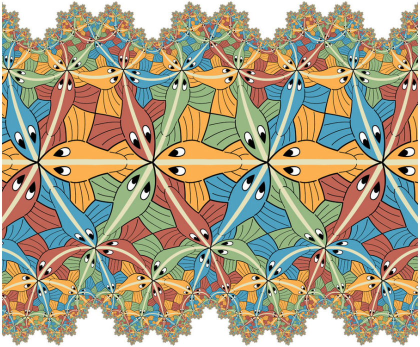
Bases de Riesz de exponenciales

Jorge Antezana



$C\binom{d}{m} = FcE\text{-}U_nL^p$

Coloquios del Departamento de Matemática

Teorema

La familia $\{e^{2\pi in(\cdot)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$.

Como consecuencia de esto se tiene que todo elemento $f\in L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ se puede escribir como

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n e^{2\pi int}$$

donde la convergencia de la serie es en $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ y la igualdad en casi todo punto. Además

$$\|f\|_{L^2}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha_n|^2=\|\{\alpha_n\}\|_{\ell^2}^2$$

por lo tanto el operador lineal

$$U(\{\alpha_n\})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n e^{2\pi int}$$

resulta un isomorfismo isométrico de $\ell^2(\mathbb{Z})$ en $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$.

Dada $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

y se extiende a todo $L^2(\mathbb{R})$ como un operador unitario.

Dada $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-2\pi i t \omega}\, dt$$

y se extiende a todo $L^2(\mathbb{R})$ como un operador unitario.

Definición

El espacio de Paley Wiener, denotado PW_π, se define como:

$$PW_\pi := \left\{ F \in L^2(\mathbb{R}) : \ \mathrm{sop}(\widehat{F}) \subseteq \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]\right\}.$$

Dada $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

y se extiende a todo $L^2(\mathbb{R})$ como un operador unitario.

Definición

El espacio de Paley Wiener, denotado PW_π, se define como:

$$PW_\pi := \left\{ F \in L^2(\mathbb{R}) : \ \operatorname{sop}(\widehat{F}) \subseteq \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \right\}.$$

$$F \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\omega)\, e^{2\pi i \omega x}\, d\omega\,.$$

Dada $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

y se extiende a todo $L^2(\mathbb{R})$ como un operador unitario.

Definición

El espacio de Paley Wiener, denotado PW_π, se define como:

$$PW_\pi := \left\{ F \in L^2(\mathbb{R}) :\ \mathrm{sop}(\,\widehat{F}\,) \subseteq \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \right\}.$$

$$F \longrightarrow F(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{F}(\omega)\, e^{2\pi i \omega x}\, d\omega\,.$$

Dada $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

y se extiende a todo $L^2(\mathbb{R})$ como un operador unitario.

Definición

El espacio de Paley Wiener, denotado PW_π, se define como:

$$PW_\pi := \left\{ F \in L^2(\mathbb{R}) :\ \operatorname{sop}(\,\widehat{F}\,) \subseteq \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \right\}.$$

$$F \longrightarrow F(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{F}(\omega)\, e^{2\pi i\omega x}\, d\omega\,.$$

Más aún, usando Plancherel se obtiene que

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\, \overline{e^{-2\pi i\omega x}\chi_{[-1/2,1/2]}}\, d\omega = \int_{\mathbb{R}} F(t)\, \overline{\frac{\sin \pi(t-x)}{\pi(t-x)}}\, dt\,.$$

Teorema de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov

Teorema

Sea $F \in PW_\pi$. Entonces

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \, .$$

La convergencia de la serie es en $L^2(\mathbb{R})$ y uniforme.

Teorema de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov

Teorema

Sea $F \in PW_\pi$. Entonces

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \, .$$

La convergencia de la serie es en $L^2(\mathbb{R})$ y uniforme.

Observación: Si en vez de evaluar en $\mathbb{Z}$ se evalúa en $\mathbb{Z} + \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se obtiene el mismo resultado:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+\alpha) \frac{\sin \pi(x-(n+\alpha))}{\pi(x-(n+\alpha))}$$

puesto que el espacio es invariante por traslaciones y dichas traslaciones actúan unitariamente en PW_π.

Bases de exponenciales en $\mathbb{R}^d$

Sea Ω un abierto conexo de medida uno contenido en $\mathbb{R}^d$.

Definición

Dadas $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que $g = \partial_{x_j} f$ si para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx = -\int_\Omega f \, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx.$$

Sea D_j el operador definido como $-i\partial_{x_j}$ en $C_0^\infty(\Omega)$.

Pregunta (Segal '58)

¿Cuándo los operadores D_j se pueden extender a operadores autoadjuntos (no acotados) en $L^2(\Omega)$?

Teorema (Fuglede '74)

Se puede si y sólo si $L^2(\Omega)$ admite una b.o.n. de exponenciales.

Bases de exponenciales en $\mathbb{R}^d$

Sea Ω un abierto conexo de medida uno contenido en $\mathbb{R}^d$.

Definición

Dadas $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que $g = \partial_{x_j} f$ si para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx = -\int_\Omega f \, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx.$$

Sea D_j el operador definido como $-i\partial_{x_j}$ en $C_0^\infty(\Omega)$.

Pregunta (Segal '58)

¿Cuándo los operadores D_j se pueden extender a operadores autoadjuntos (no acotados) en $L^2(\Omega)$?

Teorema (Fuglede '74)

Se puede si y sólo si $L^2(\Omega)$ admite una b.o.n. de exponenciales.

Bases de exponenciales en $\mathbb{R}^d$

Sea Ω un abierto conexo de medida uno contenido en $\mathbb{R}^d$.

Definición

Dadas $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que $g = \partial_{x_j} f$ si para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx = -\int_\Omega f\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx.$$

Sea D_j el operador definido como $-i\partial_{x_j}$ en $C_0^\infty(\Omega)$.

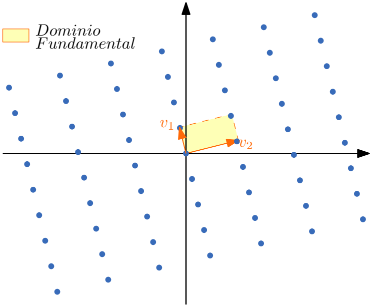
Pregunta (Segal '58)

¿Cuándo los operadores D_j se pueden extender a operadores autoadjuntos (no acotados) en $L^2(\Omega)$?

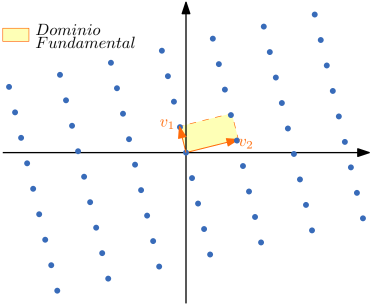
Teorema (Fuglede '74)

Se puede si y sólo si $L^2(\Omega)$ admite una b.o.n. de exponenciales.

Sea Λ es un retículo de $\mathbb{R}^d$, i.e., $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ donde A es una matriz inversible de tamaño $d \times d$.



Sea Λ es un retículo de $\mathbb{R}^d$, i.e., $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ donde A es una matriz inversible de tamaño $d \times d$.



El retículo dual, que denotaremos $\Lambda^\perp$, es otro retículo en $\mathbb{R}^d$ que está definido por

$$\begin{aligned}\Lambda^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^d : e^{2\pi i x\cdot\lambda} = 1 \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \lambda \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.\end{aligned}$$

Comentario: Si $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ entonces $\Lambda^\perp = (A^{-1})^*\mathbb{Z}^d$.

Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

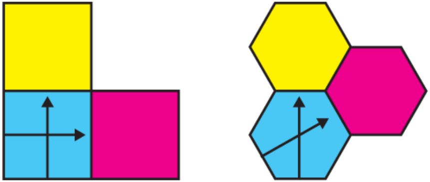
$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

Ejemplos:

Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

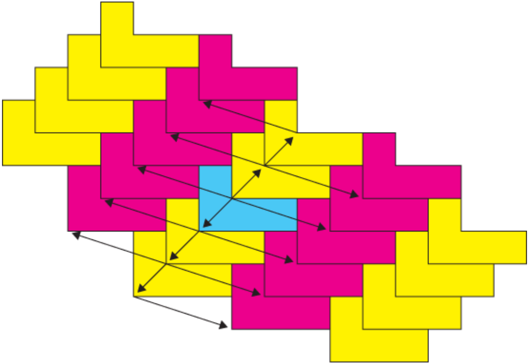
Ejemplos:



Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

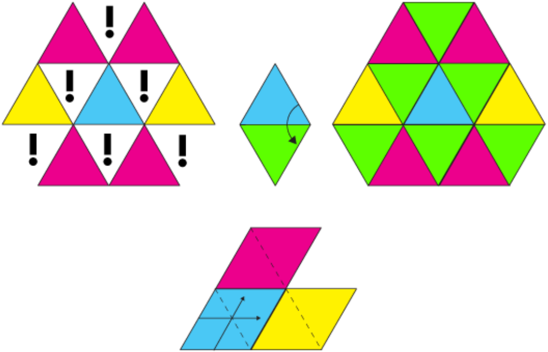
Ejemplos:



Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

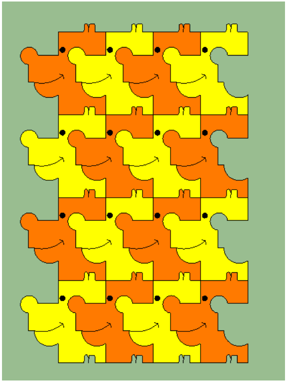
Ejemplos:



Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

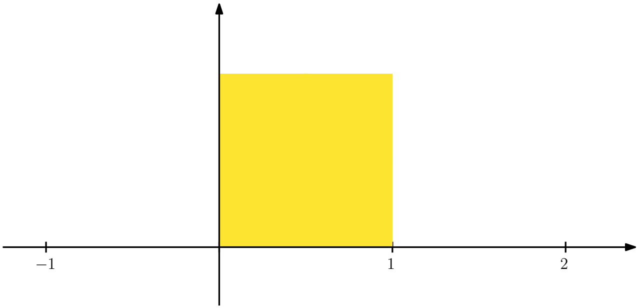
Ejemplos:



Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

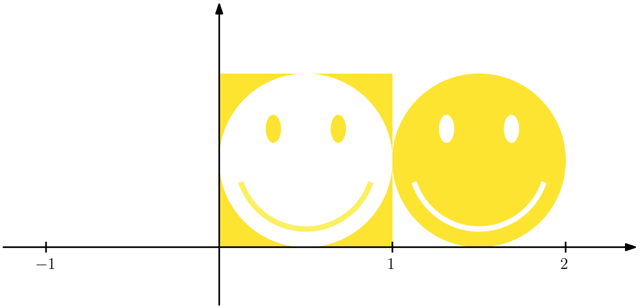
Ejemplos:



Se dice que un conjunto Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

Ejemplos:



Sea Ω un compacto de $\mathbb{R}^d$ tal que $|\Omega| = 1$ y Λ un retículo.

Teorema (Fuglede '74)

El conjunto de exponenciales $\{e^{2\pi i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda^\perp}$ es una base ortogonal de $L^2(\Omega)$ si y sólo si Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ cuando se lo traslada con Λ.

Sea Ω un compacto de $\mathbb{R}^d$ tal que $|\Omega| = 1$ y Λ un retículo.

Teorema (Fuglede '74)

El conjunto de exponenciales $\{e^{2\pi i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda^\perp}$ *es una base ortogonal de* $L^2(\Omega)$ *si y sólo si* Ω *genera un teselado de* $\mathbb{R}^d$ *cuando se lo traslada con* Λ.

Conjetura (Fuglede '74)

El espacio $L^2(\Omega)$ admite una b.o.n. de exponenciales si y sólo si Ω tesela $\mathbb{R}^d$ con cierto conjunto Γ.

Sea Ω un compacto de $\mathbb{R}^d$ tal que $|\Omega| = 1$ y Λ un retículo.

Teorema (Fuglede '74)

El conjunto de exponenciales $\{e^{2\pi i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda^\perp}$ es una base ortogonal de $L^2(\Omega)$ si y sólo si Ω genera un teselado de $\mathbb{R}^d$ cuando se lo traslada con Λ.

Conjetura (Fuglede '74)

El espacio $L^2(\Omega)$ admite una b.o.n. de exponenciales si y sólo si Ω tesela $\mathbb{R}^d$ con cierto conjunto Γ.

En los últimos 11 años, a partir de los trabajos de

- B. Farkas
- A. Iosevich
- M. Kolountzakis
- M. Matolcsi
- T. Tao:

Teorema

La conjetura de Fuglede es falsa (en ambas direcciones) si $d \geqslant 3$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto tal que $|\Omega| = 1$.

Teorema (Laba '01)

La conjetura de Fuglede vale si Ω es la unión de dos intervalos.

Teorema (Iosevich - Kolountzakis '12)

Si $\{e^{2\pi i\lambda(\cdot)}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una b.o.n. de $L^2(\Omega)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\Lambda = k\mathbb{Z} + \{r_1, \ldots, r_k\}$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto tal que $|\Omega| = 1$.

Teorema (Laba '01)

La conjetura de Fuglede vale si Ω es la unión de dos intervalos.

Teorema (Iosevich - Kolountzakis '12)

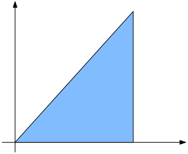
Si $\{e^{2\pi i\lambda(\cdot)}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una b.o.n. de $L^2(\Omega)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\Lambda = k\mathbb{Z} + \{r_1, \dots, r_k\}$.

Comentario: Algo que se utiliza constantemente es lo siguiente:

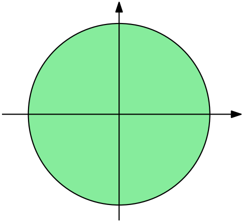
$$\left\langle e^{2\pi i\lambda(\cdot)}, e^{2\pi i\mu(\cdot)} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega e^{2\pi i(\lambda-\mu)x}\, dx = \widehat{\chi}_\Omega(\lambda - \mu).$$

Ejemplos sin bases ortonormales

- El triángulo:



- El disco $\mathbb{D}$: En este caso, sólo existen una cantidad finita de exponenciales ortogonales entre sí.



Conjetura (Fuglede '74)

Los conjuntos de exponenciales mutuamente ortogonales en $L^2(\mathbb{D})$ no poseen más de 3 elementos.

Bases de Riesz

Si $\{f_\lambda\}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ entonces $U : \ell^2 \to L^2(\Omega)$ definido por:

$$U(\{\alpha_\lambda\}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda f_\lambda$$

resulta un isomorfismo isométrico.

Definición

La familia $\{f_\lambda\}$ es una base de Riesz de $L^2(\Omega)$ si el operador $S : \ell^2 \to L^2(\Omega)$ definido por:

$$S(\{\alpha_\lambda\}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda f_\lambda$$

es acotado e inversible.

Comentario: En este caso

$$A\|\{\alpha_\lambda\}\|^2_{\ell^2} \leqslant \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda f_\lambda \right\|_{L^2} \leqslant B\|\{\alpha_\lambda\}\|^2_{\ell^2}\,.$$

Teselaciones múltiples

Recordemos que un conjunto Ω genera un teselado del espacio $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

Diremos que el teselado tiene multiplicidad k si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = k, \quad \text{a.e.}$$

Teselaciones múltiples

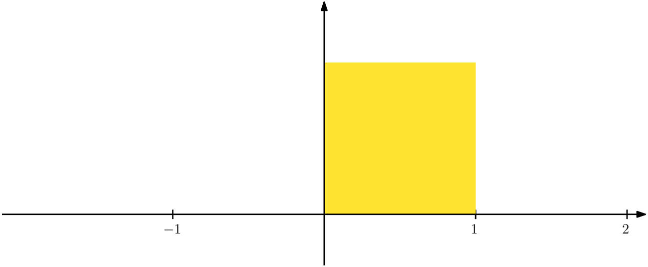
Recordemos que un conjunto Ω genera un teselado del espacio $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

Diremos que el teselado tiene multiplicidad k si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = k, \quad \text{a.e.}$$

Ejemplo: Supongamos que $\Lambda = \mathbb{Z}^2$



Teselaciones múltiples

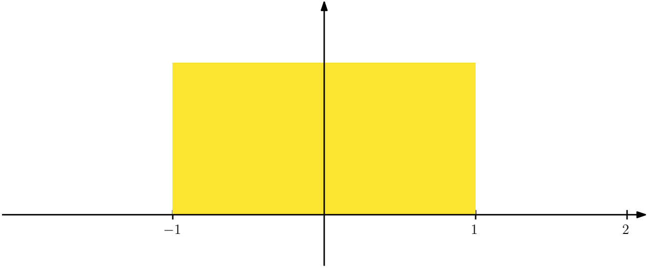
Recordemos que un conjunto Ω genera un teselado del espacio $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = 1, \ \text{ a.e.}$$

Diremos que el teselado tiene multiplicidad k si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = k, \ \text{ a.e.}$$

Ejemplo: Supongamos que $\Lambda = \mathbb{Z}^2$



Teselaciones múltiples

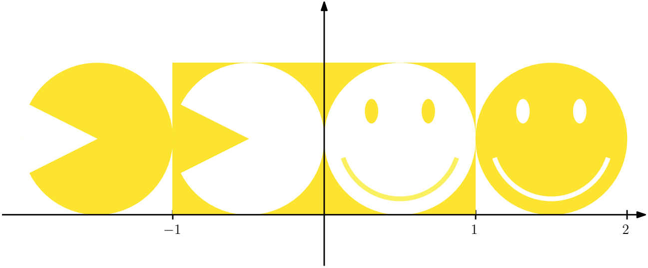
Recordemos que un conjunto Ω genera un teselado del espacio $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

Diremos que el teselado tiene multiplicidad k si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x - \lambda) = k, \quad \text{a.e.}$$

Ejemplo: Supongamos que $\Lambda = \mathbb{Z}^2$



Teselaciones múltiples

Recordemos que un conjunto Ω genera un teselado del espacio $\mathbb{R}^d$ al ser trasladado con el conjunto Λ si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1, \quad \text{a.e.}$$

Diremos que el teselado tiene multiplicidad k si

$$\Delta_\Omega(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = k, \quad \text{a.e.}$$

Lema

Si Ω genera un k-teselado de $\mathbb{R}^d$ con el retículo Λ, entonces

$$\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k \cup E,$$

donde $|E| = 0$ y los Ω_j son dos a dos disjuntos y c/u tesela $\mathbb{R}^d$ con Λ.

Existencia de bases de Riesz de exponenciales

Sea Λ un retículo de $\mathbb{R}^d$ y recordemos que

$$\Lambda^\perp = \{\mu \in \mathbb{R}^d : e^{2\pi i\, \mu\cdot\lambda} = 1\ \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Teorema (Grepstad-Lev '14, Kolountzakis '14)

Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^d$ tales que para todo conjunto acotado Ω que genera un k-teselado de $\mathbb{R}^d$ con Λ, el conjunto

$$\{e^{2\pi i\,(\alpha_j+\mu)\cdot\omega}\,\chi_\Omega(\omega) :\ \mu \in \Lambda^\perp,\ 1 \leqslant j \leqslant k\} \tag{1}$$

es una base de Riesz de $L^2(\Omega)$.

Existencia de bases de Riesz de exponenciales

Sea Λ un retículo de $\mathbb{R}^d$ y recordemos que

$$\Lambda^\perp = \{\mu \in \mathbb{R}^d : e^{2\pi i\,\mu\cdot\lambda} = 1 \;\forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Teorema (Grepstad-Lev '14, Kolountzakis '14)

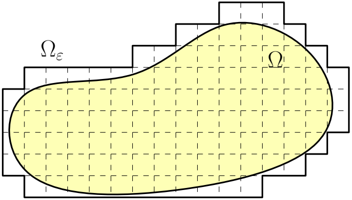
Existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^d$ tales que para todo conjunto acotado Ω que genera un k-teselado de $\mathbb{R}^d$ con Λ, el conjunto

$$\{e^{2\pi i\,(\alpha_j+\mu)\cdot\omega}\,\chi_\Omega(\omega) : \; \mu \in \Lambda^\perp\,,\; 1 \leqslant j \leqslant k\} \tag{1}$$

es una base de Riesz de $L^2(\Omega)$.

Comentarios:

- Para casi toda k-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$ vale (1).
- Todo compacto se aproxima (en medida) por conjuntos que k-teselan



Existencia de bases de Riesz de exponenciales

Proposición (Agora, A., Cabrelli (Quizás '15))

Si Ω es acotado y $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de la forma

$$\{e^{2\pi i\,(\alpha_j+\mu)\cdot\omega}\,\chi_\Omega(\omega):\ \mu\in\Lambda^\perp\,,\ 1\leqslant j\leqslant k\}$$

entonces Ω genera un k-teselado de $\mathbb{R}^d$ con Λ.

Existencia de bases de Riesz de exponenciales

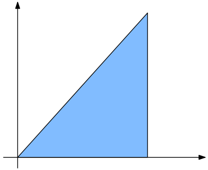
Proposición (Agora, A., Cabrelli (Quizás '15))

Si Ω es acotado y $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de la forma

$$\{e^{2\pi i\,(\alpha_j+\mu)\cdot\omega}\,\chi_\Omega(\omega) : \ \mu \in \Lambda^\perp\,,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

entonces Ω genera un k-teselado de $\mathbb{R}^d$ con Λ.

Comentario: Si Ω es un triángulo



entonces $L^2(\Omega)$ no admite una base de Riesz de exponenciales con frecuencias periódicas.

Problema abierto

¿Posee $L^2(\Omega)$ una base de Riesz de exponenciales no periódica?

Supongamos que el $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es una unión de finitos intervalos disjuntos

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$$

Si $b_n - a_n \in \mathbb{Q}$ entonces $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de exponenciales.

Supongamos que el $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es una unión de finitos intervalos disjuntos

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$$

Si $b_n - a_n \in \mathbb{Q}$ entonces $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de exponenciales.

Problema

¿Qué ocurre si $\Omega = [0, 1] \cup [2, \pi]$?, el espacio $L^2(\Omega)$ ¿admite una base de Riesz de exponenciales?

Supongamos que el $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es una unión de finitos intervalos disjuntos

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$$

Si $b_n - a_n \in \mathbb{Q}$ entonces $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de exponenciales.

Problema

¿Qué ocurre si $\Omega = [0,1] \cup [2,\pi]$?, el espacio $L^2(\Omega)$ ¿admite una base de Riesz de exponenciales?

Teorema (Seip '95)

Si Ω es la unión de dos intervalos entonces $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de exponenciales.

Supongamos que el $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es una unión de finitos intervalos disjuntos

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$$

Si $b_n - a_n \in \mathbb{Q}$ entonces $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de exponenciales.

Problema

¿Qué ocurre si $\Omega = [0,1] \cup [2,\pi]$?, el espacio $L^2(\Omega)$ ¿admite una base de Riesz de exponenciales?

Teorema (Seip '95)

Si Ω es la unión de dos intervalos entonces $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de exponenciales.

Problema

Supongamos que Ω es una unión finita de intervalos con longitudes $\mathbb{Q}$-LI?, ¿admite $L^2(\Omega)$ una base de Riesz de exponenciales?

Teorema (Kozma-Nitzan '14)

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *es una unión finita de intervalos, entonces* $L^2(\Omega)$ *admite una base de Riesz de exponenciales.*

Teorema (Kozma-Nitzan ’14)

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *es una unión finita de intervalos, entonces* $L^2(\Omega)$ *admite una base de Riesz de exponenciales.*

Algunos problemas abiertos

Qué ocurre si Ω es:

- Un abierto acotado;
- El triángulo en $\mathbb{R}^2$;
- $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$, para $d \geqslant 2$.

¡Muchas gracias!